BULLETIN
DE
L'ACADÉMIE POLONAISE DES SCIENCES

SÉRIE DES SCIENCES
MATHÉMATIQUES, ASTRONOMIQUES ET PHYSIQUES

Volume VIII Numéro 6

VARSOVIE 1960

Le Bulletin de l'Académie Polonaise des Sciences est publié en Séries.

La présente Série comprend des communications du domaine de la mathématique, astronomie et physique

Lesdites sciences sont du domaine de la Troisième Classe de l'Académie Polonaise des Sciences.

La présente Série paraît mensuellement.

Les communications destinées à être publiées dans le Bulletin sont présentées à la Rédaction du Bulletin par les membres de l'Académie.

Adresse de la Rédaction: Pałac Kultury i Nauki, Varsovie

BULLETIN
DE
L'ACADÉMIE POLONAISE DES SCIENCES

Rédacteur en chef
K. KURATOWSKI

Rédacteur en chef suppléant
L. INFELD

SÉRIE DES SCIENCES
MATHÉMATIQUES, ASTRONOMIQUES ET PHYSIQUES

Rédacteur de la Série
A. MOSTOWSKI

Comité de Rédaction de la Série
K. BORSUK, W. IWANOWSKA, A. JABŁOŃSKI, W. RUBINOWICZ

VOLUME VIII
NUMERO 6

VARSOVIE 1960

PRINTED IN POLAND

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE, W-WA. MIODOWA 10

Nakład 1071+159 egz.	*Rękopis dostarczono 5.V.1960*
Ark. wyd. 4,75, ark. druk. 4,75+0,375	*Podpisano do druku 18.IX.1960*
Papier druk. sat. 80 g kl. III	*Druk ukończono we wrześniu 1960*
Format B5, 70×100 cm	*Zam. prod. 201/60 Cena zł 20.—*

WARSZAWSKA DRUKARNIA NAUKOWA, W-WA, ŚNIADECKICH 8

BULLETIN DE L'ACADÉMIE
POLONAISE DES SCIENCES
Série des sci. math., astr.
et phys. — Vol. VIII, No. 6, 1960

MATHEMATICS

On the Solutions of the Hammerstein Integral Equations

by

WANG SHENG-WANG

Presented by W. ORLICZ on February 21, 1960

1. In this note, we shall discuss the solutions of the Hammerstein integral equations

$$\varphi(s) = \int_G K(s,t)\, f(t, \varphi(t))\, dt. \tag{1}$$

This problem has been developed by many mathematicians, such as A. Hammerstein, M. A. Krasnoselsky, M. M. Weinberg and some other under various conditions, [1] — [4].

2. Let G be a L-measurable set in a finite dimensional Euclidean space, $K(s,t)$ defined on $s, t \in G$ — a quasi-negative symmetrical kernel *) which defines a completely continuous operator in L; $f(t,u)$, defined on $t \in G$, $-\infty < u < \infty$ satisfies the following conditions: for every u, the function $f(t,u)$ is measurable with respect to t and for almost every t, it is continuous with respect to u

THEOREM 1. *If $K(s,t)$, $f(t,u)$ satisfy the above conditions and*

$$+\int_0^u f(t,u)\, du \geqslant au^2 + b(t)\,|u|^{2-\sigma} + c(t), \tag{2}$$

where $a > \lambda_1$ (λ_1 — the largest positive characteristic value of K), $b(t) \in L^{a/\sigma}$, $0 < \sigma < a$, $c(t) \in L$, then for Eq. (1) there exists at least one solution in L^2

Proof. Let $g(t),u) = bu - f(t,u)$, where $b > a$ is arbitrary, then

$$2\int_0^u g(t,u)\, du = bu^2 - \int_0^u f(t,u)\, du \leqslant (b-a)\,u^2 - b(t)\,|u|^{2-\sigma} - c(t). \tag{3}$$

Since b is a regular value of K, hence $(I - bK)^{-1}$ is bounded. Let $L = -(I - bK)^{-1}K$. Then it is symmetrical, and completely continuous.

*) By a quasi-negative kernel, we mean that it exists at most finite positive characteristic values.

Let us arrange all of the characteristic values of K as follows

$$\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \lambda_3 \geqslant \dots,$$

then all those of L are

$$0 < b - \lambda_1 \leqslant b - \lambda_2 \leqslant b - \lambda_3 \leqslant \dots. \tag{4}$$

(4) shows that L is positive and $b - \lambda_1$, is the least positive characteristic value of L.

By the inequality (3) and a theorem due to M. M. Weinberg (cf. [2], p. 267), there exists for the equation

$$\varphi = Lg\varphi \tag{5}$$

at least one solution in L^2.

By multiplying both sides of (5) by $(I - b\,K)$, we can easily show that for Eq. (1) there also exists at least one solution in L^2.

Thus, the Theorem is proved.

M. M. Weinberg proved in his work ([2] p. 275) the existence of the solutions of (1) for $K(s, t)$ — a quasi-negative kernel under the following condition

$$2\int_0^u f(t, u)\,du \geqslant au^2 + b(t)\,|u|^{2-\sigma} + c(t),$$

where $a = \lambda_1$ — the maximum positive characteristic value of K, $b(t)$, $c(t)$ and σ are limited, as Weinberg's Theorem 1 is, obviously, stronger than that given by us.

3. In this section, we shall give an extension of a theorem of C. L. Dolph, [3].

If K is a linear symmetrical operator, then it can be expressed as

$$K = \int_m^M \lambda\,dE_\lambda,$$

where E_λ is the spectral family of K. The spectrum Λ is a closed bounded set, hence, if G is the complementary of Λ, G is open.

THEOREM 2. *If K, defined by $K(s, t)$, is a linear symmetrical operator (not necessarily completely continuous) then (λ_1, λ_2) is an interval of G, $\lambda_1, \lambda_2 \in G$ and zero is not contained in (λ_1, λ_2). If there exist μ_1, μ_2 such that $\lambda_1 < \mu_1 < \mu_2 < \lambda_2$ and*

$$\frac{1}{\mu_2} \leqslant \frac{f(t, u_1) - f(t, u_2)}{u_1 - u_2} \leqslant \frac{1}{\mu_1} \qquad (-\infty < u_1, u_2 < \infty),$$

then for Eq. (1) there exists one and only one solution in L^2 and it can be reached by a special iterative process.

Proof. Let

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2}\right), \qquad \gamma = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\mu_1} - \frac{1}{\mu_2}\right) \qquad g(t, u) = f(t, u) - \frac{1}{\mu}u,$$

then

$$-\gamma = \frac{1}{\mu_2} - \frac{1}{\mu} \leqslant \frac{g(t,u_1) - g(t,u_2)}{\mu_1 - \mu_2} \leqslant \frac{1}{\mu_1} - \frac{1}{\mu} = \gamma.$$

Hence, for any $\varphi_1, \varphi_2 \in L^2$

$$\|g\varphi_1 - g\varphi_2\| \leqslant \gamma \|\varphi_1 - \varphi_2\|.$$

Furthermore, $L = (I - 1/\mu K)^{-1} K$, can be expressed as

$$L = \int_m^M \frac{\lambda}{1 - \lambda/\mu} dE_\lambda = \int_m^M \frac{1}{1/\lambda - 1/\mu} dE_\lambda,$$

hence

$$\|L\| = \max\left\{\frac{1}{1/\lambda_1 - 1/\mu}, \frac{1}{1/\mu - 1/\lambda_2}\right\},$$

and

$$\gamma \|L\| = g < 1.$$

Thus,

$$\|Lg\varphi_1 - Lg\varphi_2\| \leqslant g \|\varphi_1 - \varphi_2\|.$$

Then, by the well-known principle of the compressive map of S. Banach, for the equation

$$\varphi = Lg\varphi$$

there exists one and only one solution in L^2, evidently it is also the only solution of Eq. (1).

Next, we establish the special iterative process.

Let $\{e_n\}$ be a complete orthogonal system in L^2, P_n — the projection on the space E_n generated by $\{e_1, \ldots, e_n\}$. We proceed as follows

$$\varphi_{n+1} = P_n Lg\varphi_n$$

with $\varphi_1 \in L^2$ arbitrary. By a manner quite similar to the proof given by C. L. Dolph in [3], we can prove that φ_n tends to the solution of (1) as $n \to \infty$.

Thus, the Theorem is proved.

Remark. If $0 \in (\lambda_1, \lambda_2)$, the Theorem remains valid, when

$$-\gamma \leqslant \frac{f(t,u_1) - f(t,u_2)}{u_1 - u_2} \leqslant \gamma \qquad (-\infty < u_1, u_2 < \infty),$$

where $\gamma < \max\{1/M, 1/-m\}$.

DEPARTMENT OF MATHEMATICS, NANKING UNIVERSITY, CHINA

REFERENCES

[1] M. A. Krasnoselsky, *Topological methods in the theory of non-linear integral equations* (in Russian), Gostechizdat, 1956.

[2] M. M. Weinberg, *Variational methods of investigation on non-linear operators* (in Russian), Gostechizdat, 1956.

[3] C. L. Dolph, *Non-linear integral equations of the Hammerstein type*, Trans. Amer. Math. Soc., **60** (1949), 2.

[4] A. Hammerstein, *Nichtlineare Integral-gleichungen nebst Anwendungen*, Acta Math., **54** (1929).

BULLETIN DE L'ACADÉMIE
POLONAISE DES SCIENCES
Série des sci. math., astr.
et phys. — Vol. VIII, No. 6, 1960

MATHÉMATIQUE

Problème non-linéaire à la dérivée oblique

par

J. WOLSKA-BOCHENEK

Présenté par T. WAŻEWSKI le 4 mars, 1960

Nous nous proposons de résoudre dans le présent travail le problème non-linéaire à la dérivée oblique, c.à-d. le problème de la recherche d'une fonction $u(x, y)$, qui à l'intérieur d'un domaine G limité par une courbe fermée Γ satisfait presque partout à l'équation elliptique

$$\Delta u + a(x, y)\, u_x + b(x, y)\, u_y + c(x, y)\, u = f(x, y) \tag{1}$$

et en tout point Π du contour Γ à la condition limite suivante

$$\frac{du}{dl_1} + \gamma(\Pi)\, u = \varphi\left(\Pi, u, \frac{du}{dl_2}\right), \tag{2}$$

où $\frac{du}{dl_1}$ et $\frac{du}{dl_2}$ désignent les dérivées dans les directions des axes l_1 et l_2. La condition limite (2) peut être présentée sous la forme équivalente:

$$\alpha_1 u_x - \beta_1 u_y + \gamma u = \varphi(\Pi, u, \alpha_2 u_x - \beta_2 u_y), \tag{2'}$$

où

$$\alpha_i = \cos(l_i, x); \qquad \beta_i = \cos(l_i, y); \qquad \alpha_i^2 + \beta_i^2 = 1, \qquad (i = 1, 2).$$

Le problème (2) dans le cas, où le membre droit est une fonction donnée du point $\Pi \in \Gamma$, était étudié par I. N. Vécoua [1].

Nous admettons les suppositions suivantes:

I. Le domaine G est simplement connexe, limité par la courbe $\Gamma \in C^1_{\tilde{\mu}}$, c.à-d. possédant en tout point la tangente continue; l'angle entre les tangentes aux points Π_1 et Π_2 de la courbe Γ satisfait à la condition suivante

$$\delta_{\Pi_1 \Pi_2} \leqslant \text{const}\, r^{\tilde{\mu}}_{\Pi_1 \Pi_2} \qquad 0 < \tilde{\mu} \leqslant 1.$$

D'après la méthode de la représentation conforme, nous pouvons réduire le problème au domaine du cercle unitaire sur le plan de la variable complexe.

II. Les fonctions réelles données: $a(x, y)$, $b(x, y)$, $c(x, y)$ $f(x, y)$ sont définies et tout point $z = x + iy$ du domaine G et sont absolument intégrables avec leur puissance $p > 2$; elles appartiennent notamment à la classe $L_p(G+\Gamma)$.

III. Les coefficients $a_i(\Pi)$, $\beta_i(\Pi)$, $\gamma(\Pi)$ $(i = 1, 2)$ sont des fonctions données réelles du point $\Pi(\zeta) \in \Gamma$, où $\zeta = \xi + i\eta$; ils satisfont à la condition de Hölder suivante:

$$|a_i(\Pi_1) - a_i(\Pi_2)| < H_\alpha r^\mu_{\Pi_1 \Pi_2}, \qquad (i = 1, 2)$$

$$|\beta_i(\Pi_1) - \beta_i(\Pi_2)| < H_\beta r^\mu_{\Pi_1 \Pi_2}, \qquad 0 < \sigma \leqslant \mu$$

$$|\gamma(\Pi_1) - \gamma(\Pi_2)| < H_\gamma r^\sigma_{\Pi_1 \Pi_2}.$$

IV. La fonction donnée réelle $\varphi[\Pi, u_0, u_1]$ est définie et bornée dans le domaine $[\Pi \in \Gamma, |u_0| \leqslant R, |u_1| \leqslant R]$ et satisfait à la condition suivante:

$$|\varphi(\Pi, u_0, u_1) - \varphi(\Pi', u_0', u_1')| \leqslant H_\varphi [r^\sigma_{\Pi\Pi'} + |u_0 - u_0'|^\sigma + |u_1 - u_1'|].$$

En appliquant la méthode de I. N. Vécoua [1], nous pouvons ramener le problème (1), (2) au problème suivant:

$$\partial_{\bar z} w_* + A w_* + B \overline{w}_* + C u = F \qquad \text{(dans } G\text{)},$$

$$\operatorname{Re}[\zeta^{-n} w_*] + \gamma_* u = \varphi_*[\Pi; u, a_2 u_x - \beta_2 u_y] \quad \text{(sur } \Gamma\text{)},$$

où l'on a posé:

$$(3) \qquad \begin{cases} \partial_{\bar z} w_* = 1/2\,[(w_*)_x + i(w_*)_y], \\ \partial_z u = 1/2\,(u_x - i u_y), \end{cases}$$

$$(3') \qquad w_*(z) = e^{\chi(z)}\ w(z) = 2\, e^{\chi(z)}\ (u_x - i u_y) \equiv 2\, e^{\chi(z)}\, \partial_z u,$$

la fonction $\chi(z) = p + iq$ étant la fonction holomorphe dans le cercle G donné par l'intégrale de Schwartz:

$$(4) \qquad \chi(z) = \frac{1}{2\pi} \int_\Gamma q(t) \frac{t+z}{t-z} \frac{dt}{t},$$

où $q = -\arg \lambda + n \arg z$, $\lambda = \alpha + i\beta$, et n désigne l'indice du problème proposé, c-à-d.

$$(5) \qquad n = \frac{1}{2\pi} \Delta_\Gamma \arg \lambda(t).$$

Les fonctions A, B, C, F, γ_*, φ_*, s'expriment par les fonctions données $a, b, c, f, \gamma, \varphi, \chi$.

Dans le cas $n \geqslant 0$ le problème se ramène à la solution du système des deux équations non-linéaires aux fonctions inconnues $w_*(z)$ et $u(x, y)$:

$$(6) \qquad \begin{cases} w_* = P_1 \varphi_* [z, u, a_2 u_x - \beta_2 u_y] + P_2 u + f_1(z) + \sum_{k=1}^{2n+1} c_k w_k(z), \\ u = c_0 + P w_*, \end{cases}$$

où l'on a posé:

$$(7) \qquad \begin{cases} P_1 \varphi_* = \int_0^{2\pi} \hat{X}_n(z, e^{i\psi}) \varphi_* [\psi u, a_2 u_x - \beta_2 u_y] \, d\psi, \qquad \zeta = e^{i\psi}, \\ P_2 u = -\int_0^{2\pi} \hat{X}_n(z, e^{i\psi}) \gamma(\psi) u \, d\psi + \\ \qquad - \iint_G [\Omega_n'(z, z_1) C(z_1) + \Omega_n''(z, z) C(z_1)] u(x_1, y_1) \, dx_1 \, dy_1, \\ f_1(z) = \iint_G \hat{\Omega}_n(z, z_1) f(x_1, y_1) \, dx_1 \, dy_1. \end{cases}$$

$$P w_* = \operatorname{Re}\left[-\frac{1}{2\pi} \iint_G \left(\frac{e^{-\chi(\xi)} \overline{w_*(\zeta)}}{\zeta - z} - \frac{z e^{\chi(\xi)} w_*(\zeta)}{1 - \bar{\zeta} z} \right) d\xi \, d\eta \right]$$

$$\hat{X}_n(z, e^{i\psi}) = X_n(z, e^{i\psi}) \, e^{p(\psi)}.$$

$$\hat{\Omega}_n(z, \zeta) = 1/2 \, \Omega_n'(z, \zeta) \, e^{\chi(\zeta)} + 1/2 \, \Omega_n''(z, \zeta) \, e^{\chi(\zeta)}.$$

X_n, Ω_n', Ω_n'', étant les résolvantes du problème de Riemann-Hilbert, généralisé dans le cas du cercle [2], w_k — solutions linéairement indépendantes du problème homogène, c_k — des constantes réelles arbitraires.

Pour résoudre le système d'équations (6), considérons le système d'équations de la forme:

$$(8) \qquad \begin{cases} w_* = P_1 \varphi_* [z, u, a_2 u_1 - \beta_2 u_2] + P_2 u + f_1 + \sum_{k=1}^{2n+1} c_k w_k, \\ u = c_0 + P w_*, \\ u_1 = \frac{\bar{w}_* + w_*}{2} e^{-\chi(z)}, \qquad u_2 = \frac{w_* - \bar{w}_*}{2i} e^{-\chi(z)}, \end{cases}$$

aux fonctions inconnues $w_*(z)$, $u(x, y)$, $u_1(x, y)$, $u_2(x, y)$ dans le domaine $z \in G + \Gamma$. Nous allons étudier ce système en appliquant le théorème topologique de J. Schauder [3] relatif au point invariant d'une transformation fonctionnelle. Considérons donc l'espace Λ de Banach, composé de tous les systèmes des fonctions $[w_*(z), u(x, y), u_1(x, y), u_2(x, y)]$, où les fonctions complexes $w_*(z)$ et les fonctions réelles $u(x, y)$, $u_1(x\ y)$, $u_2(x, y)$ sont définies et continues en tout point $z = x + i\,y \in G + \Gamma$. En outre, les fonctions $u(x, y)$ possèdent la dérivée $\partial_z u$ au sens (3) par rapport à la variable $z = x + iy$ en tout point $z \in G + \Gamma$.

On définit la norme des points Q de l'espace A par la somme des bornes supérieures.

$$\delta(Q,0)=\sup|w_*|+\sup|u|+\sup|u_1|+\sup|u_2|+\sup|\partial_z u|. \tag{9}$$

Soit dans cet espace l'ensemble E de tous les points $Q[w_*, u, u_1, u_2]$ satisfaisant aux conditions:

$$\begin{cases} |w_*|\leqslant\varrho;\ |u|\leqslant R;\ |u_1|\leqslant R_1;\ |u_2|\leqslant R_2;\ |\partial_z u|\leqslant\varrho', \\ |w_*(z)-w_*(z')|\leqslant\varkappa|z-z'|^\tau, \\ |u_i(z)-u_i(z')|\leqslant\varkappa_i|z-z'|^\tau \qquad (i=1,2), \\ |\partial_z u(z)-\partial_z u(z')|\leqslant\varkappa'|z-z'|^\tau, \end{cases} \tag{10}$$

où $\tau=\min\left(\sigma,\dfrac{p-2}{p}\right)$, les constantes positives $R, R_1, R_2, \varrho, \varrho'$, étant arbitraires mais satisfaisant à l'inégalité: $\sup\alpha_2 R_1+\sup\beta_2 R_2\leqslant R$. L'ensemble E est évidémment fermé et convexe.

Transformons maintenant l'ensemble E, en faisant correspondre à tout point $Q[w_*, u, u_1 u_2]$ de cet ensemble un point $\hat{Q}[W, U, U_1 U_2]$ de l'espace A déterminé par les relations fonctionnelles:

$$\begin{cases} W=P_1\varphi_*[z,u,\alpha_2 u_1-\beta_2 u_2]+P_2\mu+f_1+\sum_{k=1}^{2n+1}c_k w_k, \\ U=c_0+Pw_*, \qquad U_1=\dfrac{\overline{w}_*+w_*}{2}e^{-\chi(z)}, \qquad U_2=\dfrac{\overline{w}_*-w_*}{2i}e^{-\chi(z)}. \end{cases} \tag{11}$$

La transformation (11) est continue et le point transformé $\hat{Q}[W, U, U_1, U_2]$ fera partie de l'ensemble E, si les coefficients Hölder et les bornes supérieures des fonctions f, c, γ, φ sont suffisamment petites et les constantes $\varkappa$ et ϱ satisfont aux conditions: $\varkappa=\min(2\varkappa_1, 2\varkappa_2, 2\varkappa')$ et $\varrho=\min(2\varrho', R_1, R_2)$.

Les fonctions transformées W, U, U_1, U_2 sont équicontinues et équibornées — donc l'ensemble transformé est compact et il existe au moins un point invariant relativement à la transformation (11). c.à-d. vérifiant le système d'équations (8). On voit, d'après les équations (8), que les fonctions U_1 et U_2 sont égales aux fonctions U_x et U_y. Donc, la fonction $U=c_0+PW$ est la solution du problème (1), (2) pour les constantes c_k fixées.

La solution U possède la dérivée première continue et la dérivée seconde généralisée (dans le sens de Sobolew [4]), appartenant à la classe $L_p(G+\Gamma)$, c.-à-d.: $U\in C^1$, $U\in D_{2,p}$.

Un développement plus détaillé des considérations précédentes sera publié sous le même titre dans Annales Polonici Mathematici.

INSTITUT MATHÉMATIQUE, ACADÉMIE POLONAISE DES SCIENCES
(INSTYTUT MATEMATYCZNY, PAN)

OUVRAGES CITÉS

[1] I. N. Vécoua, *Le problème limite à la derivée oblique pour l'équation elliptique* (en russe), AN, **90** (1953), 1113—1116.

[2] — , *Fonctions analytiques généralisées* (en russe), Moscou, 1959, pp. 227—380.

[3] J. Shauder, *Der Fixpunktsatz in Funktionalräumen*, Studia Math., **2** (1930).

[4] S. L. Sobolew, *Quelques applications de l'analyse fonctionelle dans la physique mathématique* (en russe) L. G. U., 1950.

BULLETIN DE L'ACADÉMIE
POLONAISE DES SCIENCES
Série des sci. math., astr.
et phys. — Vol. VIII, No. 6, 1960

MATHEMATICS

On Generalized Orlicz Spaces

by

W. MATUSZEWSKA

Presented by W. ORLICZ on March 22, 1960

1. We call a *φ-function* (and denote by Greek letters $\varphi, \psi, \ldots$) every continuous function $\varphi(u)$ defined for $u \geqslant 0$, non decreasing, vanishing only for $u = 0$, and such that $\varphi(u) \to \infty$ for $u \to \infty$.

For $x(t)$ measurable in $\langle a, b\rangle$ (where $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$) we write $\Im_\varphi(x) = \int_a^b \varphi(|x(t)|)\,dt$. If $\Im_\varphi(x) < \infty$, then x is called *φ-integrable*, we then write $x \in L^\varphi\langle a, b\rangle$. If $\lambda x \in L^\varphi\langle a, b\rangle$ for a constant $\lambda = \lambda_x > 0$, we write $x \in L^{*\varphi}\langle a, b\rangle$. The set $L^\varphi\langle a, b\rangle$ is convex and the set $L^{*\varphi}\langle a, b\rangle$ is a linear space (called the Orlicz space, if φ is convex, [2]).

In this paper I give some results pertaining to the question, which theorems known for the space $L^{*\varphi}\langle a, b\rangle$ in case of a convex φ can be generalized to arbitrary φ-functions.

We say that φ is *non-weaker than ψ for large u* (in symbols $\psi \overset{l}{\prec} \varphi$), if there are constant c, d, l $k > 0$ such that

$$(+) \qquad c\psi(lu) \leqslant d\varphi(ku) \quad \text{for} \quad u \geqslant u_0.$$

If $\varphi \overset{l}{\prec} \psi$ and $\psi \overset{l}{\prec} \varphi$, we write $\varphi \overset{l}{\sim} \psi$ and call this relation the *equivalence for large u*. $\varphi \overset{l}{\sim} \psi$ if and only if there are constants $a, b, k_1, k_2 > 0$ such that for sufficiently large u

$$a\varphi(k_1 u) \leqslant \psi(u) \leqslant b\varphi(k_2 u),$$

$\overset{l}{\sim}$ is an equivalence relation and $\overset{l}{\prec}$ is transitive. If φ is convex, then our definitions of $\overset{l}{\prec}$ and $\overset{l}{\sim}$ are equivalent to those of [2]; for arbitrary φ they are more general that those given in [1] and [2]. We say that φ satisfies *the condition (Δ_α)* for large u, if

$$\varphi(\alpha u) \leqslant d_\alpha \varphi(u) \quad \text{for} \quad u \geqslant u_0(\alpha),$$

where $d_\alpha > 1$ is a constant. Moreover, φ is said to satisfy *the condition* (Δ_α), $\alpha > 1$, for large u, if

$$\varphi(u)\, c_\alpha \leqslant \varphi(\alpha u) \quad \text{for} \quad u \geqslant u_0(\alpha),$$

$c_\alpha > 1$ being a constant.

If $\varphi \overset{l}{\sim} \psi$ and if φ satisfies the condition (Δ_α) or (∇_α), then so does ψ.

If the inequality (+) is satisfied for $u \geqslant u_0 = 0$, we say that φ *is non-weaker than* ψ for $u \geqslant 0$ (or: for all u), in symbols $\psi \overset{a}{\prec} \varphi$. In a similar way we introduce the relation of equivalence for all u (writing $\varphi \overset{a}{\sim} \psi$) and the conditions (Δ_α) and (∇_α) for all u.

2.1. The following properties are equivalent: (a) φ satisfies (Δ_2) for large u; (b) φ satisfies (Δ_α), $\alpha > 1$, for large u; (c) $\varphi \overset{l}{\sim} \chi$, where $\chi(u) = \psi(u^r)$ and ψ is a concave φ-function. The exponent r may be chosen equal to $r = \lg d_\alpha / \lg \alpha$, where, in case (b), d_α is the constant defined in (Δ_α) and in case (c), χ satisfies (Δ_α) with the constant d_α.

2.2. The following properties are equivalent: (a) φ satisfies (Δ_α), $\alpha > 1$, for large u, (b) $\varphi \overset{l}{\sim} \chi$, where $\chi(u) = \psi(u^s)$ and ψ is a convex φ-function. The exponent s may be taken $s = \lg c_\alpha / \lg \alpha$, where, assuming (a), c_α is the constant defined in (Δ_α), and, assuming (b), χ satisfies (Δ_α) with the constant c_α.

2.3. A necessary and sufficient condition for $\varphi \overset{l}{\sim} \psi$, where ψ is a convex function, is

$$\frac{\varphi(u_2)}{u_2} \geqslant m \frac{\varphi(n u_1)}{u_1} \quad \text{for} \quad u_2 > u_1 \geqslant u_0,$$

m, n being positive constants. Replacing in the last inequality $\geqslant$ by $\leqslant$ we obtain a necessary and sufficient condition for equivalence of φ to a concave function for large u. Theorems analogous to 2.1 — 2.3 hold also in the case $\overset{a}{\sim}$ and for the conditions (Δ_α), (∇_α) for all u.

3. A necessary and sufficient condition for the inclusion

$$\bigcap_{\nu=1}^{\infty} L^{\varphi_\nu}\langle a, b\rangle \subset L^{\psi}\langle a, b\rangle$$

is the existence of a positive integer m and of a constant $d > 0$ such that

$$(*) \qquad \psi(u) \leqslant d \sup[\varphi_1(u), \varphi_2(u), \ldots, \varphi_m(u)],$$

where (*) is to be satisfied for $u \geqslant u_0$, if $\langle a, b\rangle$ is finite and for $u \geqslant 0$, if $\langle a, b\rangle$ is infinite.

3.1. The inclusion

$$L^{\psi}\langle a, b\rangle \subset \bigcup_{\nu=1}^{\infty} L^{\varphi_\nu}\langle a, b\rangle$$

holds if and only if there are: a positive integer m and a constant $c_m > 0$ such that the inequality

$$(**) \qquad \varphi_m(u)\, c_m \leqslant \psi(u)$$

is satisfied for all $u \geqslant u_0$, if $\langle a, b\rangle$ is finite, and for $u \geqslant 0$, if $\langle a, b\rangle$ is infinite.

As corollaries to 3 and 3.1 we note

3.2. (a) If $L^{\varphi_n}\langle a, b\rangle \subset L^{\varphi_{n-1}}\langle a, b\rangle$, $L^{\varphi_{n+1}}\langle a, b\rangle \neq L^{\varphi_n}\langle a, b\rangle$ for $n = 1, 2, \ldots$, then for every ψ, $L^{\psi}\langle a, b\rangle \neq \bigcup_{\nu=1}^{\infty} L^{\varphi_\nu}\langle a, b\rangle$;

(b) If $L^{\varphi_n}\langle a, b\rangle \supset L^{\varphi_{n+1}}\langle a, b\rangle$, $L^{\varphi_{n+1}}\langle a, b\rangle \neq L^{\varphi_n}\langle a, b\rangle$ for $n = 1, 2 \ldots$, then for every ψ, $L^{\psi}\langle a, b\rangle \neq \bigcap_{\nu=1}^{\infty} L^{\varphi_\nu}\langle a, b\rangle$.

3.3. A necessary and sufficient condition for $L^{\varphi}\langle a, b\rangle = L^{*\varphi}\langle a, b\rangle$ is that φ should satisfy (Δ_2) for large u, or for $u \geqslant 0$, depending whether $\langle a, b\rangle$ is finite or infinite.

3.4. If φ does not satisfy (Δ_2) for large u and if $\langle a, b\rangle$ is finite, then there exist functions x and y such that

$$\mathcal{I}_\varphi(x) < \infty, \quad \mathcal{I}_\varphi(\lambda x) = \infty \quad \text{for} \quad \lambda > 1,$$

$$\mathcal{I}_\varphi(\lambda y) < \infty \quad \text{for} \quad 0 < \lambda < 1, \quad \mathcal{I}_\varphi(y) = \infty.$$

An analogous theorem remains true for infinite $\langle a, b\rangle$; the condition (Δ_2) must then be satisfied for all u.

3.5. A necessary and sufficient condition for the inclusion $L^{*\varphi_2}\langle a, b\rangle \subset L^{*\varphi_1}\langle a, b\rangle$ (resp. the equation $L^{*\varphi_2}\langle a, b\rangle = L^{*\varphi_1}\langle a, b\rangle$), to hold is $\varphi_1 \overset{l}{\prec} \varphi_2$ (resp. $\varphi_1 \overset{l}{\sim} \varphi_2$), if $\langle a, b\rangle$ is finite and $\varphi_1 \overset{a}{\prec} \varphi_2$ (resp. $\varphi_1 \overset{a}{\sim} \varphi_2$), if $\langle a, b\rangle$ is infinite.

4. In this section we shall introduce a kind of convergence (called φ-convergence) in the space $L^{*\varphi}\langle a, b\rangle$. The φ-convergence is a special case of the modular convergence in the sense of Musielak and Orlicz (cf. [4]). A sequence of elements x_n of $L^{*\varphi}\langle a, b\rangle$ is called *φ-convergent* to x_0 (in symbols $x_n \overset{\varphi}{\to} x_0$), if $\mathcal{I}_\varphi(\lambda(x_n - x_0)) \to 0$ with a certain $\lambda > 0$ (depending on the sequence x_n). In $L^{*\varphi}\langle a, b\rangle$, an F-norm may be introduced in such a way that the convergence of a sequence x_n to 0 with respect to this norm implies $\mathcal{I}_\varphi(x_n) \to 0$ and so $x_n \overset{\varphi}{\to} 0$, too. This norm defined by the formula $|x|_\varphi = \inf\{\varepsilon > 0 : \mathcal{I}_\varphi(x/\varepsilon) \leqslant \varepsilon\}$ (cf. [3], [4]) will be called the *norm generated by* φ. By the symbol $[L^{*\varphi}\langle a, b\rangle, \|\cdot\|_\varphi]$ we denote the Fréchet space $L^{*\varphi}\langle a, b\rangle$ with the norm $\|\cdot\|_\varphi$.

4.1. Let the interval $\langle a, b\rangle$ be finite; the following properties are equivalent: (a) φ satisfies the condition (Δ_2) for large u; (b) $L^{*\varphi}\langle a, b\rangle$ is

separable; (c) $\varrho_\varphi(x_n) \to 0$ implies $\|x_n\|_\varphi \to 0$. An analogous theorem is true for infinite $\langle a, b \rangle$, we have only to replace in (a) the expression "for large u" by "or $u \geqslant 0$". As regards (a) and (b) in the case o a convex φ, (cf. e.g. [5]).

4.2. An element $x \in L^{*\varphi}\langle a, b\rangle$ is called *finite*, if $\varrho_\varphi(\lambda x) < \infty$ for an arbitrary $\lambda > 0$. We denote the set of the finite elements by $M^\varphi\langle a, b\rangle$.

4.3. Let $\langle a, b\rangle$ be finite; the element x is finite if and only if $|x|_\varphi$ is absolutely continuous, i.e. $\|x\chi_{E_n}\|_\varphi \to 0$ for $E_n \subset \langle a, b\rangle$, $|E_n| \to 0$. Here χ_E denotes the characteristic function of the set E. An analogous theorem is true for infinite $\langle a, b\rangle$, assuming φ to satisfy the condition (Δ_2) for small u *). If (Δ_2) does not hold for small u, then there exist elements with absolutely continuous norm which are not finite.

4.4. The set $M^\varphi\langle a, b\rangle$ is identical with the smallest linear subspace closed in $[L^{*\varphi}\langle a, b\rangle, \|\ \|_\varphi]$ containing the bounded functions in the case of finite $\langle a, b\rangle$ and containing the bounded functions equal to zero outside a certain finite subinterval of $\langle a, b\rangle$ in the case of infinite $\langle a, b\rangle$. Hence, $M^\varphi\langle a, b\rangle$ is separable with respect to the norm $\|\ \|_\varphi$.

4.5. A necessary and sufficient condition for $M^\varphi\langle a, b\rangle = L^{*\varphi}\langle a, b\rangle$ is that φ should satisfy (Δ_2) for large u, if $\langle a, b\rangle$ is finite and for $u > 0$, if $\langle a, b\rangle$ is infinite.

4.6. The following three relations are equivalent: (a) $L^{*\varphi}\langle a, b\rangle = L^{*\psi}\langle a, b\rangle$; (b) $M^\varphi\langle a, b\rangle = M^\psi\langle a, b\rangle$; (c) $\|x_n\|_\psi \to 0$ implies $\|x_n\|_\varphi \to 0$ and conversely, where in the case of finite $\langle a, b\rangle$ we restrict x_n to bounded measurable functions and for infinite $\langle a, b\rangle$ to bounded measurable functions vanishing outside a certain finite subinterval of $\langle a, b\rangle$, respectively; (d) $x_n \xrightarrow{\psi} 0$ implies $x_n \xrightarrow{\varphi} 0$ and conversely, where x_n are taken as in (c).

4.61. If $\varphi \overset{I}{\sim} \psi$, $\langle a, b$ is finite, the relations $x_n \to_\psi 0$ and $|x_n|_\varphi \to 0$ are equivalent and analogously in case $\overset{a}{\sim}$ and $\langle a, b\rangle$ infinite.

4.7. If $\varphi(u) = \psi(u^s)$, where $0 < s \leqslant 1$ and if ψ is a convex function, then in $L^{*\varphi}\langle a, b\rangle$ norm

$$|x|_\varphi^* = \inf\left\{\varepsilon > 0 : \varrho_\varphi\left(\frac{x}{\varepsilon^{1/s}}\right) \leqslant 1\right\}$$

may be defined. This norm is s-homogenous, i. e. $|\lambda x|_\varphi^* = \lambda^s |x|_\varphi^*$ and equivalent to the norm generated by φ; consequently, $|x_n|_\varphi^* \to 0$ implies $\varrho_\varphi(x_n) \to 0$. For $s = 1$, this theorem is known.

4.71. If an s-homogenous, complete norm $\|\ \|^0$ is defined in $L^{*\varphi}\langle a, b\rangle$, $0 < s \leqslant 1$ and if the convergence to 0 with respect to this norm implies

*) Condition (Δ_α) for small u means that $\varphi(u)\, c_\alpha \leqslant \varphi(\alpha u)$ holds for $u \leqslant u_0(\alpha)$, where $c_\alpha > 1$ is a constant.

the modular convergence to 0, then $\varphi \overset{l}{\sim} \chi$, if $\langle a, b \rangle$ is finite and $\varphi \overset{a}{\sim} \chi$, if $\langle a, b \rangle$ is infinite. $\chi(u) = \psi(u^s)$; ψ is a convex function. Special cases of 4.71 were proved in [3] and [6]. Let us note that if φ satisfies the condition (Δ_α) and the constant c_α is known, it is possible to introduce the s-homogenous norm and the degree of homogeneity of the s-norm in 4.7 is completely determined; $s = \lg c_\alpha / \lg \alpha$.

4.8. A set $X_0 \subset L^{*\varphi}\langle a, b \rangle$ is called *φ-bounded*, if $t_n x_n \overset{\varphi}{\to} 0$ whenever $x_n \in X_0$ and $t_n \to 0$. A set X_0 is φ-bounded if and only if it is bounded in $[L^{*\varphi}\langle a, b \rangle, \|\cdot\|_\varphi]$.

4.81. (*a*) If φ satisfies the condition (Δ_α) for large u in the case of $\langle a, b \rangle$ finite, and for $u \geqslant 0$ in the case of $\langle a, b \rangle$ infinite, then every set $X_r = \{x : \Im_\varphi(x) \leqslant r\}$ is φ-bounded; (b) if a certain set $X_r = \{x : \Im_\varphi(x) \leqslant r\}$ is φ-bounded, then φ satisfies (Δ_α) for large u, if $\langle a, b \rangle$ is finite, and for $u > 0$, if $\langle a, b \rangle$ is infinite.

The case of φ satisfying the condition (Δ_2), $\langle a, b \rangle$ finite, was considered in [6].

Full proofs of the above theorems will appear in Studia Mathematica. The author wishes to express sincere thanks to Professor. W. Orlicz for his helpful criticism and valuable remarks.

DEPARTMENT OF MATHEMATICS, A. MICKIEWICZ UNIVERSITY, POZNAŃ
(KATEDRA MATEMATYKI, UNIWERSYTET A. MICKIEWICZA, POZNAŃ)

REFERENCES

[1] Z. Birnbaum und W. Orlicz, *Über die Verallgemeinerung des Begriffes der zeuinander konjugierten Potenzen*, Studia Math., **3** (1931), 1—67.

[2] M. A. Krasnosielskiĭ, J. B. Rutsitzkiĭ, *Convex functions and Orlicz spaces*, (in Russian) Moscow, 1958.

[3] S. Mazur and W. Orlicz, *On some classes of linear spaces*, Studia Math., **17** (1958), 97—119.

[4] J. Musielak and W. Orlicz, *On modular spaces*, Studia Math., **18** (1959), 49—65.

[5] W. Orlicz, *Über Räume* (L^M), Bull. Acad. Pol. Sc. Letter., Ser. A (1936), 93—107.

[6] S. Rolewicz, *Some remarks on the space N (l) and N (L)*, Studia Math., **18** (1959), 1—9.

BULLETIN DE L'ACADÉMIE
POLONAISE DES SCIENCES
Série des sci. math., astr.
et phys. — Vol. VIII, No. 6, 1960

MATHEMATICS

Remarks on the Sample Functions of Some Stochastic Processes

by

M. FISZ

Presented by H. STEINHAUS on March 28, 1960

1. We consider the real separable stochastic proces $\{x_t, t \in I\}$ (see [2], p. 51), where I_0 is a closed finite interval. We denote by Ω the set of elementary events ω, by $\mathfrak{F}_{I_0}$ the smallest Borel field of ω sets with respect to which all the random variables $x_t\,(t \in I_0)$ are measurable and by P — the probability measure on $\mathfrak{F}_{I_0}$. As it is known [7], the Borel field $\mathfrak{F}_{I_0}$ is generated by the field of ω sets of the form

$$(*) \qquad \{[x_{t_1}(\omega), \ldots, x_{t_n}(\omega)] \in A\},$$

where A is any right-hand semi-closed interval and $(t_1, \ldots, t_n)$ is any finite set of values of $t \in I_0$. The measure P on $\mathfrak{F}_{I_0}$ is uniquely determined by the P-measure of ω sets of the form (x). Denote further by x_I the increment of x_t in the interval $I\,(I_0)$ and by $|I|$ — the length of I. We shall consider the following functions:

$$(1) \qquad a(I) = P(x_I \neq 0),$$

$$(2) \qquad b(I, \varepsilon) = P(|x_I| \supset \varepsilon),$$

$$\left.\begin{aligned} (3) \qquad A(I) &= \int_J a(J) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a(I_{nk}) \\ (4) \qquad B(I, \varepsilon) &= \int_J b(J, \varepsilon) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} b(I_{nk}, \varepsilon) \end{aligned}\right\} \text{ as } \max_{1\leqslant k\leqslant n} |I_{nk}| \to 0,$$

where $\{I_{nk}\}$ is a partition of I in non-overlapping intervals I_{nk} $(k = 1, \ldots, n)$. The expressions $A\,(I)$ and $B\,(I, \varepsilon)$ are the Burkill integrals of $a\,(I)$ and $b\,(I, \varepsilon)$, respectively. The corresponding upper Burkill integrals $\overline{A}\,(I)$ and $\overline{B}\,(I, \varepsilon)$ are obtained by replacing in (3) and (4) the symbol lim by $\overline{\lim}$. Denote finally

$$(5) \qquad Q(t) = \lim \frac{a(I)}{|I|},$$

as I contracts to a fixed point $t \in I$.

The aim of this note is to characterize the sample functions of the process $\{x_t, t \in I_0\}$ under different assumptions concerning the formulae (1) - (5).

2. We begin with the following definition.

DEFINITION 1. The sample function $x_t(\omega)$ will be called *jumping function wherever locally monotonic* (shortly: *jumping function wlm*), it at any continuity point $t \in I_0 - S(\omega)$ of $x_t(\omega)$, where $S(\omega)$ is some (possibly empty) set nowhere dense in I_0, at which $x_t(\omega)$ is locally monotonic, the equality $x_{t'}(\omega) = x_t(\omega)$ holds for all t' from some interval $(t - \vartheta(t, \omega), t + \vartheta(t, \omega))$.

DEFINITION 2. The sample function $x_t(\omega)$ will be called a *jumping function,* if at any continuity point $t \in I_0$ of $x_t(\omega)$, the equality $x_{t'}(\omega) = x_t(\omega)$ holds for all t' from some interval $(t - \vartheta(t, \omega), t + \vartheta(t, \omega))$.

It is evident how definitions 1 and 2 should be modified for the endpoints of the interval I_0.

THEOREM 1. *Let the process* $\{x_t, t \in I_0\}$ *be separable and let the relation*

$$\lim_{|I| \to 0} a(I) = 0 \tag{6}$$

hold, where $I \subset I_0$. *Then almost all (P) sample functions* $x_t(\omega)$ *of the process are jumping functions wlm.*

THEOREM 2. *Let* $\{x_t, t \in I_0\}$ *be a separable stochastic process and let the relation*

$$\lim_{|I| \to 0} b(I, \varepsilon) = 0 \tag{7}$$

hold for any $\varepsilon > 0$, *where* $I \subset I_0$. *Then if* $t_0 \in I_0$ *is a fixed discontinuity point of the process, the probability that* x_t *is discontinuous at* t_0 *and has at this point both right- and left-hand limits equal* 0.

Theorem 3 which we shall now formulate is a stronger version of some results obtained earlier by the author [4]. It has been assumed there that the process has no fixed discontinuity points. Now this assumption is entirely omitted in part 2° and is replaced in part 1° of Theorem 3 by the weaker relation (7). The former assumption is now obtained as assertion (ii).

In obtaining these strengthened results essential use is made of Theorem 2.

THEOREM 3. *Let the stochastic process* $\{x_t, t \in I_0\}$ *be separable.*

1°. *If relation* (7) *holds for any* $\varepsilon > 0$ *and, moreover, if*

$$\bar{A}(I_0) < \infty, \tag{8}$$

then for every open interval $I \subset I_0$:

(i) *almost all (P) sample functions of the process are jumping functions,*

(ii) *the process has no fixed discontinuity points,*

(iii) *the relations* $E\,\xi(I) = A(I) = A(I)$ *hold, where* $\xi(I)$ *is the number of discontinuities of* x_t *in the interval* I,

(iv) *the set* ω *such that at the discontinuities (if any) of* $x_t(\omega)$ *both onesided limits exist, has probability* 1,

(v) *the function* $Q(t)$ *exists almost everywhere in* I *and satisfies the relation*

$$\int_I Q(t)\,dt \leqslant A(I). \tag{9}$$

2°. *If* $a(I)$ *s an absolutely continuous function of an interval, or* $a(I)$ *satisfies the Lipschitz condition, then assertions* (i) - (v) *are satisfied and, moreover, the inequality sign in relation* (9) *can be replaced by the sign of equality.*

THEOREM 4. *Let* $\{x_t, t \in I_0\}$ *be a separable stochastic process. The relation*

$$P(x_t = \text{const.}, t \in I_0) = 1 \tag{10}$$

holds if and only if the relation

$$Q(t) \equiv 0 \tag{11}$$

holds uniformly with regard to $t \in I_0$.

Let us remark that if we assume that for any $\varepsilon > 0$ relation (7) is true and, moreover, $\overline{B}(I, \varepsilon) < \infty$ we cannot obtain any new properties of the realizations of the process in addition to the property established in Theorem 2 above. Nevertheless the following theorem holds.

THEOREM 5. *Let the stochtastic process* $\{x_t, t \in I_0\}$ *be separable and let the relation*

$$B(I_0, \varepsilon) = 0 \tag{12}$$

hold for any $\varepsilon > 0$. *Then almost all* (P) *sample functions* $x_t(\omega)$ *have no discontinuity point of the first kind.*

We recall that x_t is said to have at some point t_0 a discontinuity of the first kind, if x_t has at t_0 both onesided limits which are not equal.

We remark that Dobrushin [1] has proved the assertion of Theorem 5 under the stronger assumption that, as $\Delta t > 0$, the relation

$$\sup_{\substack{t \in I_0 \\ t+\Delta t \in I_0}} P(|x_{t+\Delta t} - x_t| > \varepsilon) = o(\Delta t) \tag{13}$$

holds for any $\varepsilon > 0$.

3. We deal in this section with stochastic processes of certain special type.

THEOREM 6. *Let* $\{x_t, t \in I_0\}$ *be a separable martingale and let the relation* (12) *hold. Then almost all* (P) *sample functions of the process are continuous.*

Dobrushin [1] has proved the assertion of Theorem 6 under a stronger assumption (13).

THEOREM 7. *Let* $\{x_t, t \in I_0\}$ *be a separable Markov process and let relation* (13) *hold. Then almost all* (P) *sample functions of the process are continuous.*

Theorem 7 is a consequence of a theorem of Fuchs [5].

Denote

$$D(h, \varepsilon) = \sup_{\substack{t \in I_0 \\ t+\Delta t \in I_0 \\ |\Delta t| \leqslant h}} \int_{-\infty}^{\infty} P(|x_{t+\Delta t} - x_t| > \varepsilon / x_t = x)\, dF_t(x),$$

where $F_t(x) = P(x_t < x)$. It easily follows that the assertion of Theorem 7 holds, if $D(h, \varepsilon) = o(h)$. This slightly strengthens the Theorem of Dynkin [3] and Kinney [6] who stated that the assertion of Theorem 7 follows from the stronger assumption that $C(h, \varepsilon) = o(h)$, where

$$C(h, \varepsilon) = \sup_{\substack{t \in I_0 \\ t+\Delta t \in I_0 \\ |\Delta t| \leqslant h \\ -\infty < x < \infty}} \int_{-\infty}^{\infty} P(|x_{t+\Delta t} - x_t| > \varepsilon / x_t = x).$$

Proofs of the theorems will be given elsewhere.

INSTITUTE OF MATHEMATICS, POLISH ACADEMY OF SCIENCES
(INSTYTUT MATEMATYCZNY, PAN)

REFERENCES

[1] R. L. Dobrushin, *The continuity condition for sample martingale function,* Tieoria Viero. Primi. **3** (1958), 97—98 (in Russian).

[2] J. L. Doob, *Stochastic processes,* New York-London, 1953.

[3] E. B. Dynkin, *Conditions of continuity and lack of discontinuities of the second kind of the sample functions of a Markow process,* Izv. Akad. Nauk SSRR **16** (1952), 563—672 (in Russian).

[4] M. Fisz, *Realizations of some stochastic processes,* Studia Math. **15** (1956), 359—364.

[5] A. Fuchs, *Sur la continuité stochastique des processus stochastiques réels de Markoff,* C. R. A. cad. Sci. Paris, **237** (1953), 1396—1399.

[7] J. R. Kinney, *Continuity properties of sample functions of Markoff processes,* Trans. Amer. Mathem. Soc., **74** (1953), 280—302.

[7] A. Kolmogoroff, *Grundbergriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung,* Berlin, 1933.

BULLETIN DE L'ACADÉMIE
POLONAISE DES SCIENCES
Série des sci. math., astr.
et phys. — Vol. VIII, No. 6, 1960

MATHÉMATIQUE

Sur une propriété principale d'une classe $\mathfrak{H}$ de fonctions discontinues pour le système d'arcs

par

W. POGORZELSKI

Présenté par T. WAŻEWSKI le 28 mars, 1960

Soit dans le plan de la variable complexe un ensemble $L = l_1 + \ldots + l_m$ de points, composé d'un nombre fini d'arcs simples $l_1, l_2, \ldots, l_m$ qui n'ont pas de points intérieurs communs mais peuvent avoir des extremités communes à plusieurs arcs. Ces arcs peuvent former quelques réseaux disjoints.Rangeons d'une façon arbitraire les extrémités des arcs donnés en une suite de points différents $c_1, c_2, \ldots, c_p$. Nous supposons que les arcs donnés ont des tangentes continues en tout point, même aux extremités. Les points $c_1, \ldots, c_p$ sont donc soit des points anguleux, soit des points de rebroussement, soit des points multiples, soit enfin de simples extrémités des lignes formées par les arcs donnés (voir la figure dans notre travail [1]). Nous admettons que tout arc l_ν a une direction individuelle, fixée, indépendante des autres arcs.

Nous avons présenté [1] une définition et les propriétés d'une classe $\mathfrak{H}_\alpha^h$ des fonctions complexes discontinues, définies sur l'ensemble L. Dans la communication que voici nous donnerons la démonstration complète de la propriété principale suivante de la classe $\mathfrak{H}_\alpha^h$.

THÉORÈME. *Si la fonction complexe $\varphi(\zeta)$, définie sur l'ensemble $L' = L - \Sigma c_\nu$, appartient à la classe $\mathfrak{H}_\alpha^h$ et par conséquent vérifie les inégalités*

$$|\varphi(\zeta)| < M_\varphi \prod_{\nu=1}^{p} |\zeta - c_\nu|^{-\alpha}, \tag{1}$$

$$|\varphi(\zeta) - \varphi(\zeta_1)| < k_\varphi [|\zeta - c_\nu|\,|\zeta_1 - c_{\nu_1}|]^{-\alpha-h} |\zeta - \zeta_1|^h, \tag{1'}$$

où

$$\zeta, \zeta_1 \in \widehat{c_\nu c_{\nu_1}},\ \zeta_1 \in \widehat{\zeta c_{\nu_1}},\ 0 < \alpha < 1,\ 0 < h < 1,$$

(où $\alpha+h<1$, M_φ, k_φ sont des constantes positives), alors la fonction $\psi(\zeta)$ definie en tout point $t \in L'$ par l'intégrale singulière de Cauchy

$$\psi(\zeta)=\int_L \frac{\varphi(\tau)\,d\tau}{\tau-\zeta} \tag{2}$$

appartient à la même classe $\mathfrak{H}_\alpha^h$; elle vérifie notamment les inégalités de la forme

$$|\psi(\zeta)|<(C_1 M_\varphi+C_2 k_\varphi)\prod_{\nu=1}^{p}|\zeta-c_\nu|^{-\alpha}, \tag{3}$$

$$|\psi(\zeta)|-|\psi(\zeta_1)|<(C_1' M_\varphi+C_2' k_\varphi)\,[|(\zeta-c_\nu|\,|\zeta_1-c_{\nu_1}|]^{-\alpha-h}\,|\zeta-\zeta_1|^h, \tag{4}$$

$$\zeta,\zeta_1 \in \overset{\frown}{c_\nu c_{\nu_1}};\quad \zeta_1 \in \overset{\frown}{\zeta c_{\nu_1}};$$

où C_1, C_2, C_1', C_2' sont des constantes positives indépendantes de la fonction φ, , mais dépendantes du système d'arcs L.

Démonstration. Nous avons déjà démontré (cf. [2]) la propriété précédente de l'intégrale (2) pour le cas particulier, où les arcs $l_1,\ldots,l_m$ n'ont pas des extrémités communes. Pour démontrer le théorème dans le cas général sous considération il faut examiner les noeuds formés par les arcs donnés. Dans ce but il suffit d'étudier l'intégrale

$$\Phi(\zeta)=\int_{\overset{\frown}{cc'}} \frac{\varphi(\tau)\,d\tau}{\tau-\zeta} \tag{5}$$

pour les points ζ situés au voisinage suffisamment proche de l'extrémité c d'un arc $\overset{\frown}{c\,c'}$ arbitrairement choisi parmi les arcs l_ν. Si le point ζ est situé sur l'arc d'intégration $\overset{\frown}{c\,c'}$ de l'intégrale (5) (au sens de Cauchy), alors cette dernière jouit des propriétés de la forme (3) et (4), ce qui a été démontré dans notre ouvrage [2]. Donc, il suffit d'étudier l'intégrale (5) si les points ζ sont situés sur un arc arbitraire (des tangentes continues) $\overset{\frown}{c\,c''}$ issu du point c, n'ayant avec l'arc $\overset{\frown}{c\,c'}$ d'autres points en commun.

La propriété (3) résulte immédiatement de l'inégalité suivante:

$$|\Phi(\zeta)|<(C_0 M_\varphi+C_0' k_\varphi)|\zeta-c|^{-\alpha} \tag{6}$$

vérifiée, conformément à nos travaux antérieurs [1] et [3], par la fonction (5) au voisinage suffisamment proche du point c.

Pour démontrer la propriété de Hölder généralisée de la fonction (5), considérons d'abord le cas, où la demi-tangente cT_0' à l'arc $\overset{\frown}{c\,c''}$ au point c ne se confond pas avec la demi-tangente cT_0 à l'arc $\overset{\frown}{c\,c'}$ au point c.

Dans ce cas nous allons tracer les demi-droites cT_1 et cT_2 formant avec la demi-tangente cT_0 à l'arc $\overset{\frown}{c\,c'}$ des angles aigus suffisamment petits pour que la portion $\overset{\frown}{c\,c_0''}$ de l'arc $\overset{\frown}{c\,c''}$, située au voisinage suffisamment

proche du point c, soit extérieure à l'angle entre les demi-droites $c\,T_1$ et $c\,T_2$ contenant $c\,T_0$. Pour les deux points arbitraires ζ et ζ_1 (différents de c) de l'arc $\overset{\frown}{c\,c''}$ (tels que $\zeta_1 \in \zeta c_0''$) l'inégalité suivante est alors vraie

$$(7)\qquad |\Phi(\zeta)-\Phi(\zeta_1)| < M_\varphi\,|\zeta-\zeta_1|\sup_{(\zeta,\zeta_1)}\left|\int_{c\,c_0'}\frac{dl_\tau}{|\tau-c|^\alpha\,|\tau-\zeta|^2}+\text{const}\right|,$$

$\overset{\frown}{c\,c_0'}$ étant une portion fixée de l'arc $\overset{\frown}{c\,c'}$ à l'intérieur de l'angle $c\,T_1\,T_2$. Or, si le point ζ se trouve à l'intérieur de $\overset{\frown}{c\,c_0''}$ et τ à l'intérieur de $\overset{\frown}{c\,c_0'}$, les trois distances $|\zeta-c|$, $|\zeta-\tau|$, $|\tau-c|$ vérifient l'inégalité

$$(8)\qquad \frac{|\tau-\zeta|}{|\zeta-c|+|\tau-c|}\geqslant \sin\frac{\vartheta}{2},$$

où ϑ est une borne inférieure positive de la mesure des angles aigus, formés par les demi-droites $c\,T_1$ et $c\,T_2$ avec le vecteur $\tau-c$.

Il en résulte

$$|\Phi(\zeta)-\Phi(\zeta_1)| < \text{const.}\,M_\varphi\,|\zeta-\zeta_1|\int_{c\,c_0'}\frac{dl_\tau}{|\tau-c|^\alpha\,[|\zeta-c|+|\tau-c|]^2} <$$

$$< \frac{\text{const.}\,M_\varphi\,|\zeta-\zeta_1|}{|\zeta-c|^{\alpha+1}}$$

en supposant que $|\zeta-c|\leqslant|\zeta_1-c|$. Or, nous pouvons admettre que $|\zeta-\zeta_1|\leqslant|\zeta-c|$, puisque dans le cas contraire la propriété (4) résulte immédiatement de la propriété (6) déjà prouvée. Nous aurons donc

$$(9)\qquad |\Phi(\zeta)-\Phi(\zeta_1)| < \text{const.}\,M_\varphi\,|\zeta-c|^{-\alpha-h}\,|\zeta-\zeta_1|^h$$

en accord avec (4).

Il reste à étudier le cas plus difficile, où la demi-tangente $c\,T_0'$ à l'arc $\overset{\frown}{c\,c''}$ coïncide avec la demi-tangente $c\,T_0$ à l'arc $\overset{\frown}{c\,c'}$. Soit dans ce cas une portion $\overset{\frown}{c\,c_0'}$ de l'arc $\overset{\frown}{c\,c'}$ suffisamment petite pour que: 1) toute perpendiculaire à la tangente $c\,T_0$, au voisinage de c, coupe l'arc $\overset{\frown}{c\,c_0'}$ au point t ainsi que l'arc correspondant $\overset{\frown}{c\,c_0''}$, partie de l'arc $\overset{\frown}{c\,c''}$, en un point correspondant ζ; 2) la tangente en tout point des arcs $\overset{\frown}{c\,c_0'}$ et $\overset{\frown}{c\,c_0''}$ forme avec la tangente $c\,T_0$ des angles aigus plus petits que l'angle aigu ϑ_0. Soient deux points arbitraires, ζ_1 de l'arc $\overset{\frown}{c\,c_0''}$ et deux points correspondants t, t_1 de l'arc $\overset{\frown}{c\,c_0'}$; désignons par s et s_1 les longueurs des arcs $\overset{\frown}{c\,t}$ et $\overset{\frown}{c\,t_1}$ ($s_1>s$). Remarquons que les rapports $|\zeta-\zeta_1|/|t-t_1|$, $|\zeta-c|/|t-c|$, $|s_1-s|/|t_1-t|$ ont les bornes inférieures et supérieures positives, si ζ, $\zeta_1 \in cc_0''$.

Il suffit d'étudier le cas, où la longueur s de l'arc $\overset{\frown}{c\,t}$ est au plus égale à $^1/_3$ de la longueur de l'arc $\overset{\frown}{c\,c_0'}$. Ensuite, il suffit d'étudier le cas, où $s_1-s\leqslant s/4$, puisque dans le cas contraire la propriété (9) résulte immé-

diatement de la propriété (6). Décomposons maintenant l'intégrale (3) en une somme

$$\Phi(\zeta) = \Phi^{(ct_0)}(\zeta) + \Phi^{(t_0 c_0')}(\zeta) + \Phi^{(c_0' c')}(\zeta). \tag{10}$$

d'intégrales étendues aux arcs $\overset{\frown}{ct_0}$, $\overset{\frown}{t_0 c_0'}$, $\overset{\frown}{c_0' c'}$, où t_0 est un point de l'arc $\overset{\frown}{c c_0'}$ tel que les arcs $\overset{\frown}{ct}$ et $\overset{\frown}{t_1 t_0}$ sont de la même longueur. Soit ensuite un cercle Γ centré en t, de rayon $2|t - t_1|$. Outre la supposition que $s_1 - s \leqslant s/4$, on admet que la distance $|t_1 - t|$ est moindre que le plus petit de deux nombres: $|t - c|/4$ et δ, où la constante δ est suffisamment petite, pour que la circonférence Γ coupe l'arc $\overset{\frown}{c t_0}$ aux deux points intérieurs t' et t'' (l'étude de ce cas est suffisante). Écrivons maintenant

$$\Phi^{ct_0}(\zeta) = \int_{ct_0} \frac{\varphi(\tau) - \varphi(t)}{\tau - \zeta}\, d\tau + \varphi(t) \int_{ct_0} \frac{d\tau}{\tau - \zeta} \tag{11}$$

et décomposons la première $I_1(\zeta)$ de ces intégrales en une somme d'intégrales

$$J_1(\zeta) = \int_{t't''} \frac{\varphi(\tau) - \varphi(t)}{\tau - \zeta}\, d\tau + \int_{ct' + t''t_0} \frac{\varphi(\tau) - \varphi(t)}{\tau - \zeta}\, d\tau, \tag{12}$$

La première $J_1'(\zeta)$ de ces intégrales, en vertu de l'inégalité admise (1'), vérifie l'inégalité suivante

$$|J_1'(\zeta)| < \text{const.}\, k_\varphi \left[\int_{t't} \frac{|\tau - t|^h\, dl_\tau}{[|\tau - c|\,|t - c'|]^{\alpha+h}|\tau - t|} + \right. \tag{13}$$

$$\left. + \int_{tt''} \frac{|\tau - t|^h\, dl_\tau}{[|t - c|\,|\tau - c'|]^{\alpha+h}|\tau - t|} \right] < \frac{\text{const.}\, k_\varphi |\zeta - \zeta_1|^h}{[|t - c|\,|t_1 - c'|]^{\alpha+h}},$$

vu que la rapport $|\zeta - \tau| / |t - \tau|$ admet une borne inférieure positive. L'inégalité analogue vérifie l'intégrale $J_1'(\zeta_1)$.

Pour étudier la seconde des intégrales (12), $J_1''(\zeta)$, écrivons

$$J_1''(\zeta) - J_1''(\zeta_1) = \int_{ct' + t''t_0} \frac{\varphi(t_1) - \varphi(t)}{\tau - \zeta}\, d\tau + \int_{ct' + t''t_0} \frac{(\zeta - \zeta_1)\,|\varphi(\tau) - \varphi(t_1)|}{(\tau - \zeta)(\tau - \zeta_1)}\, d\tau. \tag{14}$$

La première composante, $D_1(z)$, vérifie l'inégalité

$$|D_1(\zeta)| < \frac{\text{const.}\, k_\varphi |t - t_1|^h}{[|t - c|\,|t_1 - c'|]^{\alpha+h}} \left| \int_{ct' + t''t_0} \frac{d\tau}{\tau - \zeta} \right| \tag{15}$$

où l'intégrale étendue aux arcs $\overset{\frown}{ct'}$ et $\overset{\frown}{t''t_0}$ est évidemment bornée, si $t - t_1 \to 0$, $t_0 \to 0$, à cause de l'égalité des longueurs des arcs $\overset{\frown}{ct}$ et $\overset{\frown}{t_1 t_0}$.

Le seconde composante du membre droit (14), $D_2(\zeta)$, vérifie l'inégalité

$$(16)\quad |D_2(\zeta)| < \text{const.}\, k_\varphi\, |\zeta - \zeta_1| \left[\int_{cl'} \frac{dl_\tau}{|\tau - c|^{\alpha+h} |t_1 - c'|^{\alpha+h} |\tau - t_1|^{1-h} |\tau - t|} + \right.$$

$$\left. + \int_{t'' t_0} \frac{dl_\tau}{|t_1 - c|^{\alpha+h} |\tau - c'|^{\alpha+h} |\tau - t_1|^{1-h} |\tau - t|} \right].$$

En remarquant que tout point τ à l'extérieur du cercle Γ vérifie les inégalités $(1/2) < |\tau - t_1| / |\tau - t| < (3/2)$, nous aurons pour la première intégrale D_2' du membre droit (16) une limitation

$$(17)\quad |D_2'| < \frac{\text{const.}}{|t_1 - c'|^{\alpha+h}} \left[\int_0^{1/2\, s'} \frac{d\sigma}{\sigma^{\alpha+h} (s-\sigma)^{2-p}} + \int_{1/2\, s'}^{s'} \frac{d\sigma}{\sigma^{\alpha+h} (s-\sigma)^{2-h}} \right] <$$

$$< \frac{\text{const.}\, |t - t_1|^{h-1}}{|t - c|^{\alpha+h} |t_1 - c'|^{\alpha+h}}$$

et pour la seconde D_2'' une limitation

$$(18)\quad |D_2''| < \frac{\text{const.}}{|t - c|^{\alpha+h} |t_1 - c'|^{\alpha+h}} \int_{s''}^{s_0} \frac{d\sigma}{(\sigma - s)^{2-h}} <$$

$$< \text{const.}\, [|t - c|\, |t_1 - c'|]^{-\alpha-h} |t - t_1|^{h-1}.$$

L'ensemble des résultats des formules (13) — (17) nous donne la propriété suivante de la première des intégrales (11) au voisinage du point c

$$(19)\quad J_1(\zeta) - J_1(\zeta_1) < \text{const.}\, k_\varphi\, |\zeta - c|^{-\alpha-h} |\zeta - \zeta_1|^h.$$

Pour la seconde des intégrales (11), J_2, nous pouvons écrire l'égalité

$$J_2(\zeta) - J_2(\zeta_1) = \varphi(t) \{ [\log(t_0 - \zeta) - \log(t_0 - \zeta_1)] -$$

$$- [\log(c - \zeta) - \log(c - \zeta_1)] \} + [\varphi(t) - \varphi(t_1)] \log \frac{t_0 - \zeta_1}{c - \zeta_1}.$$

Or, nous avons

$$|\log(c - \zeta) - \log(c - \zeta_1)| < \frac{|\zeta - \zeta_1|}{|\zeta - c|} < \frac{|\zeta - \zeta_1|^h}{|\zeta - c|^h}$$

$$|\log(t_0 - \zeta) - \log(t_0 - \zeta_1)| = \left| \int_{\zeta\zeta_1} \frac{d\zeta'}{t_0 - \zeta'} \right| < \frac{|\zeta - \zeta_1|}{\inf_{\zeta' \in \zeta\zeta_1} |t_0 - \zeta'|} < \text{const.} \left| \frac{\zeta - \zeta_1}{\zeta - c} \right|^h.$$

Le rapport $|t_0 - \zeta_1| / |c - \zeta_1|$ admet les bornes positives — inférieure et supérieure; nous aurons donc au voisinage du point c

$$(20)\quad |J_2(\zeta) - J_2(\zeta_1)| < (C_0'' M_\varphi + C_0''' k_\varphi) |\zeta - c|^{-\alpha-h}.$$

Pour la seconde intégrale de la somme (10), nous aurons

$$(21)\quad |\Phi^{(t_0 c_0')}(\zeta) - \Phi^{(t_0 c_0')}(\zeta_1)| < \text{const.} |\zeta - \zeta_1| \int_{t_0 c_0'} \frac{M_\varphi \, dl_\tau}{|\tau - c|^\alpha |\tau - \zeta| |\tau - \zeta_1|} <$$

$$< \text{const.} M_\varphi |\zeta - \zeta_1| \int_{t_0 c_0'} \frac{d\sigma}{\sigma^\alpha (\sigma - s)^2} < \text{const.} M_\varphi \frac{|\zeta - \zeta_1|^h}{|t - c|^{\alpha + h}}.$$

La dernière intégrale de la somme (10) admet une dérivée bornée, si $\zeta \in \widehat{cc_0''}$, donc

$$(22)\quad |\Phi^{(c_0' c')}(\zeta) - \Phi^{(c_0' c')}(\zeta_1)| < \text{const.} M_\varphi |\zeta - \zeta_1|.$$

En rapprochant les inégalités (9), (19), (20) et (22), nous pouvons affirmer que l'intégrale (5) vérifie la suivante condition de Hölder, généralisée:

$$(23)\quad |\Phi(\zeta) - \Phi(\zeta_1)| < (\tilde{C}_0' M_\varphi + \tilde{C}_0'' k_\varphi) |\zeta - c|^{-\alpha - h} |\zeta - \zeta_1|^h$$

sur un arc arbitraire $\widehat{cc''}$ issu du point c, au voisinage suffisamment proche de l'extrémité c, ne contenant pas d'autres extrémités. Les constantes positives $\tilde{C}_0'$, $\tilde{C}_0''$ ne dépendent pas de la fonction φ, mais dépendent des arcs $\widehat{cc'}$ et $\widehat{cc''}$. Les résultats obtenus nous permettent de conclure les propriétés (3), (4) de l'intégrale (2) pour un système arbitraire L d'arcs l_ν.

INSTITUT MATHÉMATIQUE, ACADÉMIE POLONAISE DES SCIENCES
(INSTYTUT MATEMATYCZNY, PAN)

OUVRAGES CITÉS

[1] W. Pogorzelski, *Problèmes aux limites discontinus dans la théorie des fonctions analytiques*, Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. sci. math., astr. et phys., 7 (1959), 311.

[2] — , *Sur l'équation intégrale singulière non linéaire et sur les propriétés d'une intégrale singulière pour les arcs non fermés*, J. of Math. and Mech., 7 (1958), 515—532.

[3] — , *Problème généralisé de Hilbert pour les arcs non fermés*, Ann. Ecole Norm. Sup., Paris 1958.

BULLETIN DE L'ACADÉMIE
POLONAISE DES SCIENCES
Série des sci. math., astr.
et phys. — Vol. VIII, No. 6, 1960

MATHÉMATIQUE

Problème généralisé aux dérivées tangentielles pour l'équation parabolique

par

W. POGORZELSKI

Présenté par T. WAŻEWSKI le 28 mars 1960

1. Enoncé du probléme et théorèmes fondamentaux

Soit une équation aux dérivées partielles du type parabolique normale de la forme

$$(1)\qquad \Psi(u) = \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} a_{\alpha\beta}(X,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} + \sum_{\alpha=1}^{n} b_\alpha(X,t)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha} + c(X,t)\,u +$$

$$-\frac{\partial u}{\partial t} = F\left(X,t,u,\frac{\partial u}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial u}{\partial x_n}\right)$$

dont les coefficients sont des fonctions réelles, continues et définies dans la région fermée $[X \in \Omega + S;\ 0 \leqslant t \leqslant T]$, où Ω est un domaine borné dans l'espace euclidien de points $X(x_1, \ldots, x_n)$, limité par la surface fermée S.

On admet les hypothèses suivantes:

I. Les coefficients $a_{\alpha\beta}$ sont hölderiens par rapport à X et t, aux exposants h, h' et les coefficients b_α, c sont hölderiens par rapport à X à l'exposant h.

II. La forme quadratique $\sum_{\alpha\beta} a_{\alpha\beta}(X,t)\,Z_\alpha Z_\beta$ est définie-positive dans $[\Omega + S;\ 0, T]$.

III. La fonction réelle $F(X, t, u_0, u_1, \ldots u_n)$ est définie et continue dans la région

$$(2)\qquad X \in \Omega;\quad 0 < t \leqslant T;\quad -\infty < u_\nu < +\infty;\quad (\nu = 0, 1, \ldots, n),$$

où elle vérifie l'inégalité

$$(3)\qquad |F(X,t,u_0,\ldots,u_n)| < m_F \sum_{\nu=0}^{n} |u_\nu| + m'_F\, t^{-\mu_F}\,|X P_X|^{-p}.$$

$|X P_X|$ désigne la distance entre le point X et un point P_X de la surface S le plus rapproché du point X; m_F, m'_F sont des constantes positives;

μ_F et p sont des constantes non-négatives inférieures à l'unité. En outre, on admet que la fonction F vérifie une condition généralisée de Hölder

$$(4) \qquad |F(X,t,u_0,...,u_n) - F(X',t,u_0',...,u_n')| < \\ < k(\Omega^*)\,|XX'|^{h_F}\,t^{-\mu_F} + k_F \sum_{\nu=0}^{n} |u_\nu - u_\nu'|^{h_F'}$$

dans tout domaine fermé Ω^* situé à l'intérieur du domaine Ω, pour $0 < t \leqslant T$; k_F est une constante positive, indépendante de Ω^* et $k(\Omega^*)$ — une constante positive dépendant du domaine Ω^*, qui peut être non bornée; les constantes positives h_F et h_F' ne sont pas supérieures à l'unité.

IV. La surface S vérifie les conditions connues de Liapounoff à l'exposant $0 < \varkappa \leqslant 1$.

V. La fonction $G(P,t,u_0,...,u_q)$ est définie et continue dans la région

$$(5) \qquad P \in S;\ 0 < t \leqslant T;\ -\infty < u_\nu < +\infty;\ (\nu = 0,1,...,q),\ (1 \leqslant q \leqslant n-1),$$

où elle vérifie les inégalités

$$(6) \qquad \begin{cases} |G(P,t,u_0,...,u_q)| < m_G \sum_{\nu=0}^{n} |u_\nu| + m_G'\,t^{-\mu_G}, \\ |G(P,t,u_0,...,u_q) - G(P',t,u_0',...,u_q')| < \\ < k_G \left[t^{-\mu_G}\,|PP'|^{h_G} + |u_0 - u_0'|^{h_G'} + \sum_{\nu=1}^{q} |u - u_\nu'| \right]; \end{cases}$$

m_G, m_G', k_G sont des constantes positives;

μ_G, h_G, h_G' sont des constantes telles que $0 < h_G,\ h_G' \leqslant 1$, $0 \leqslant \mu_G < 1$.

VI. La fonction $g(P,t)$, définie et continue dans la région $[P \in S,\ 0 \leqslant t \leqslant T]$, est hölderienne par rapport à P, à l'exposant h_g.

VII. On donne les q champs de tangentes sur la surface S

$$\{s_p^{(1)}\},\ \{s_p^{(2)}\},...,\{s_p^{(q)}\}, \qquad (1 \leqslant q \leqslant n-1)$$

vérifiant les inégalités

$$(7) \qquad (s_p^{(\alpha)}, s_Q^{(\alpha)}) < \text{const}\,|PQ|^{h_s}, \qquad (0 < h_s \leqslant 1)$$

$(\alpha = 1,2,...,q)$ concernant l'angle entre les directions du même champ aux deux points arbitraires P et Q de la surface S.

VIII. La fonction $f(X)$ est définie, intégrable dans le domaine Ω et vérifie une inégalité

$$(8) \qquad |f(X)| < \frac{m_f}{|XP_X|^p},$$

$m_f > 0$, $0 \leqslant p < 1$. On admet que l'ensemble de points de continuité de cette fonction n'est pas vide.

Nous posons maintenant le problème de la recherche d'une fonction $u(X, t)$, dans la région $[X \in \Omega + S,\ 0 < t \leqslant T]$, qui: 1 (vérifie l'équation donnée (1) en tout point $X \in \Omega$ pour $0 < t \leqslant T$; 2) vérifie la condition limite

$$\frac{du}{dT_P} + g(P)\,u(P, t) = G[P, t, u(P, t),\ u_{s_P}^{(1)}, \ldots, u_{s_P}^{(q)}] \tag{9}$$

en tout point P sur S pour $0 < t \leqslant T$, où $du\ dT_p$ désigne la valeur limite de la dérivée transversale

$$\frac{du}{dT_P} = \lim_{X \to P} \sum_{\alpha,\,\beta=1}^{n} a_{\alpha\beta}(X, t) \cos(N_p, x_\beta) \frac{\partial u(X, t)}{\partial x_\alpha} \tag{10}$$

et $u_{s_P}^{(\alpha)}(P, t)$ la valeur limite de la dérivée tangentielle

$$u_{s_P}^{(\alpha)}(P, t) = \lim_{X \to P} u_{s_P}^{(\alpha)}(X, t) \tag{11}$$

indépendamment de façon de la tendance du point intérieur X vers P; 3) vérifie la condition initiale

$$\lim_{X \to P} u(X, t) = f(X) \tag{12}$$

en tout point de continuité X de la fonction f. Le problème posé est une généralisation du problème aux dérivées tangentielles étudié par l'auteur dans [1], car les hypothèses admises actuellement sont beaucoup plus générales que celles dans le travail cité.

L'étude du problème posé sera basée sur les propriétés des intégrales de l'équation parabolique démontreés dans [2] et sur les nouveaux théorèmes fondamentaux suivants.

THÉORÈME FONDAMENTAL 1. *Si la densité $\varphi(Q, \tau)$ de la couche, définie et continue dans la région $[Q \in S,\ 0 < \tau \leqslant T]$, satisfait aux inégalités*

$$|\varphi(Q, \tau)| < \frac{M_\varphi}{\tau^{\mu_\varphi}}, \qquad |\varphi(Q, \tau) - \varphi(Q', \tau)| < \frac{k_\varphi}{\tau^{\mu_\varphi}} |QQ'|^{h_\varphi}, \tag{13}$$

M_φ, k_φ, μ_φ, h_φ étant des constantes vérifiant les inégalités

$$M_\varphi > 0, \quad k_\varphi > 0, \quad 0 \leqslant \mu_\varphi < 1, \quad 0 < h_\varphi \leqslant 1,$$

alors la dérivée du potentiel de simple couche

$$U(X, t) = \int_0^t \int_S \int \Gamma(X, t;\ Q, \tau)\,\varphi(Q, \tau)\,dQ\,d\tau, \tag{14}$$

relatif à l'équation (1) (*Γ désigne la solution fondamentale de l'équation* (1), *voir* [3]), *au point intérieur $X \in \Omega$ (pour $0 < t \leqslant T$) dans la direction de la tangente s_P au point arbitraire $P \in S$, possède une limite déterminée par*

la formule

$$(15)\qquad \lim_{X\to P}\frac{d}{ds_P}\,[U(X,t)] = U_{s_P}(P,t) = \int_0^t\int_S\int \Gamma_{s_P}(P,t;\ Q,\tau)\,\varphi(Q,\tau)\,dQ\,d\tau$$

contenant une intégrale singulière qui n'est pas absolument convergente. La valeur (15) admet une limitation suivante

$$(16)\qquad |U_{s_P}(P,t)| < \frac{c_0 M_\varphi + c_0' k_\varphi}{t^{\mu_\varphi+\mu-1}}$$

où

$$1-\frac{\varkappa'}{2} < \mu < 1, \qquad \varkappa' = \min(h, 2h', h_\varphi, \varkappa),$$

c_0 et c_0' sont des constantes indépendantes de la fonction φ.

THÉORÈME FONDAMENTAL 2. *Si le champ $\{s_P\}$ de directions des tangentes sur la surface S vérifie la condition* (7), *si la densité $\varphi(Q,\tau)$ de couche vérifie la condition* (13) *du théorème précédent et si, en outre, on a*

$$(17)\qquad h_\varphi < \min(h, 2h', 2\varkappa, h_s)$$

alors les valeurs limites (15) *des dérivées tangentielles vérifient une inégalité de Hölder*

$$(18)\qquad |U_{s_P}(P,t) - U_{s_{P_1}}(P_1,t_1)| < \frac{C_0 M_\varphi + C_0' k_\varphi}{t^{\mu_\varphi}}\,[|PP_1|^{h_\varphi} + |t-t_1|^{\frac{1}{2}\theta\varkappa^*}]$$

où

$$0<t<t_1\leqslant T, \quad \varkappa^* = \min\left(h, 2h', 3\varkappa, \frac{3}{2}h_\varphi\right), \quad 0<\theta<1,$$

C_0 et C_0' sont des constantes positives, indépendantes de la fonction φ. Nous signalons la conservation des valeurs des exposants μ_φ et h_φ, concernant la fonction φ.

La démonstration des théorèmes 1 et 2 sera publiée prochainement dans Ricerche di Matematica.

2. Solution du problème

Nous allons chercher la solution du problème proposé sous la forme d'une somme

$$(19)\qquad u(X,t) = \int_0^t\int_\Omega\int \Gamma(X,t;\,Y,\tau)\,F_1\left[Y,\tau,u(Y,\tau)\frac{\partial u}{\partial\xi_1},\ldots,\frac{\partial u}{\partial\xi_n}\right]dY\,d\tau +$$

$$+\int_0^t\int_S\int \Gamma(X,t;\,Q,\tau)\,\varphi(Q,\tau)\,dQ\,d\tau + \int_\Omega\int \Gamma(X,t;\,Y,0)\,f_1(Y)\,dY$$

des potentiels généralisés. On a posé

$$F_1(Y,\tau,u_0,\ldots,u_n) = -(2\sqrt{\pi})^{-n}\,[\det a^{\alpha\beta}(Y,\tau)]^{1/2}\,F(Y,\tau,u_0,\ldots,u_n), \tag{20}$$

$$f_1(Y) = (2\sqrt{\pi})^{-n}\,[\det a^{\alpha\beta}(Y,0)]^{1/2} f(Y).$$

En demandant que la fonction (19) vérifie la condition limite (9), on ramène le problème à la solution du système d'équations intégrales singulières

$$u_\nu(X,t) = \int_0^t\int_\Omega\int\Gamma_\nu(X,t;Y,\tau)\,F_1[Y,\tau,u_0(Y,\tau),\ldots,u_n(Y,\tau)\,dY\,d\tau + \tag{21}$$

$$+\int_0^t\int_S\int\Gamma_\nu(X,t;Q,\tau)\,\varphi(Q,\tau)\,dQ\,d\tau + \int_\Omega\int\Gamma_\nu(X,t;Y,0)\,f_1(Y)\,dY$$

$$(\nu = 0,\ldots,n)$$

$$-\frac{1}{2}(2\sqrt{\pi})^n\,[\det a^{\alpha\beta}(P,t)]^{-1/2}\varphi(P,t) + \tag{21'}$$

$$+\int_0^t\int_S\int\left\{\frac{d}{dT_P}\,[\Gamma(P,t;Q,\tau)] + g(P,t)\,\Gamma(P,t;Q,\tau)\right\}\varphi(Q,\tau)\,dQ\,d\tau +$$

$$+\int_0^t\int_\Omega\int\left\{\frac{d}{dT_P}\,[\Gamma(P,t;Y,\tau)] + g(P,t)\,\Gamma(P,t;Y,\tau)\right\}F_1[Y,\tau,u_0(Y,\tau),$$

$$\ldots,u_n(Y,\tau)]\,dY\,d\tau + \int_\Omega\int\left\{\frac{d}{dT_P}\,[\Gamma(P,t;Y,0)] + g(P,t)\,\Gamma(P,t;Y,0)\right\}f_1(Y)\,dY$$

$$= G[P,t;u_0(P,t),\,\bar{u}_{s_P^{(1)}}(P,t),\ldots,\bar{u}_{s_P^{(q)}}(P,t)]$$

aux $n+2$ fonctions inconnues $u_0(X,t),\ldots,u_n(X,t)$, $\varphi(P,t)$; on a désigné

$$\bar{u}_{s_P^{(\alpha)}}(P,t) = \int_0^t\int_\Omega\int\Gamma_{s_P^{(\alpha)}}(P,t;Y,\tau)\,F_1[Y,\tau,u_0(Y,\tau),\ldots,u_n(Y,\tau)]\,dY\,d\tau \tag{22}$$

$$+\int_0^t\int_S\int\Gamma_{s_P^{(\alpha)}}(P,t;Q,\tau)\,\varphi(Q,\tau)\,dQ\,d\tau + \int_\Omega\int\Gamma_{s_P^{(\alpha)}}(P,t;Y,0)\,f_1(Y)\,dY$$

$$\Gamma_0 = \Gamma; \qquad \Gamma_\nu = \Gamma_{x_\nu}; \qquad (\nu = 1,2,\ldots,n).$$

On peut démontrer l'existence de la solution du système énoncé ci-dessus par l'application du théorème topologique connu de Schauder sur le point invariant d'une transformation dans l'espace de Banach. Nous

considérons dans ce but un espace fonctionnel Λ composé de tous les systèmes $[u_0(X,t), \ldots, u_n(X,t), \varphi(P,t)]$ de fonctions *continues* réelles, définies soit dans la région $[X \in \Omega + S,\ 0 < t \leqslant T]$, soit dans la région $[P \in S;\ 0 < t \leqslant T]$ et vérifiant les inégalités

$$(23)\qquad \begin{cases} t^{\mu_\varphi + \alpha}\, u_\nu(X,t) < \infty & (\nu = 0,1,\ldots,n) \\ t^{\mu_\varphi + \alpha} |\varphi(P,t)| < \infty \end{cases}$$

où μ_φ et α sont des constantes, fixées arbitrairement, de façon qu'on ait

$$(24)\qquad \max\left(\mu_F,\ \mu_G,\ \frac{1}{2}(1+p)\right) < \mu_\varphi < 1; \quad \alpha > 0; \quad \mu_\varphi + \alpha < 1.$$

On définit d'une façon connue les opérations linéaires dans l'espace Λ, la norme d'un point $U = [u_0, \ldots, u_n, \varphi]$ par la formule

$$(25)\qquad \|U\| = \max_{\nu} \sup_{\substack{X \in \Omega \\ 0 < t \leqslant T}} [t^{\mu_\varphi + \alpha}\, u_\nu(X,t)] + \sup_{\substack{P \in S \\ 0 < t \leqslant T}} [t^{\mu_\varphi + \alpha} \varphi(P,t)]$$

et la distance $\delta(U,V) = \|U - V\|$. L'espace Λ est donc un espace de Banach. Considérons maintenant dans l'espace Λ un ensemble E de tous les points U vérifiant les inégalités

$$(26)\qquad \begin{cases} t^{\mu_\varphi} |u_\nu(X,t)| \leqslant \varrho_1, & (\nu = 0,1,\ldots,n) \\ t^{\mu_\varphi} |\varphi(P,t)| \leqslant \varrho_2 \\ t^{\mu_\varphi} |\varphi(P,t) - \varphi(P_1,t)| \leqslant \varkappa_\varphi |PP_1|^{h_\varphi} \end{cases}$$

où ϱ_1, ϱ_2, $\varkappa_\varphi$ sont des constantes positives arbitrairement fixées et l'exposant h_φ est fixé de façon qu'on ait

$$(27)\qquad 0 < h_\varphi < \min(h_G, h_g, h'_G, h_s, h, 2h', \varkappa, 1-p).$$

L'ensemble E est *fermé* et *convexe*. On transforme cet ensemble par les relations suivantes

$$(28)\qquad v_\nu(X,t) = \Xi_\nu(u_0, \ldots, u_n, \varphi), \qquad (\nu = 0,1,\ldots,n)$$

$$- \frac{1}{2}(2\sqrt{\pi})^n [\det |a^{\alpha\beta}(P,t)|]^{-1/2} \psi(P,t) +$$

$$+ \int_0^t \iint_S \left\{ \frac{d}{dT_p} [\Gamma(P,t;Q,\tau)] + g(P,t)\, \Gamma(P,t;Q,\tau) \right\} \psi(Q,\tau)\, dQ\, d\tau +$$

$$+ \Xi_{n+1}(u_0, \ldots, u_n) = G[P,t, v_0(P,t), \bar{u}_{s_P}^{(1)}(P,t), \ldots, \bar{u}_{s_P}^{(q)}(P,t)],$$

où Ξ_ν désignent les opérations fonctionnelles définies par les membres droits des équations (21) et Ξ_{n+1} — une opération fonctionnelle définie

par la somme des deuxième et troisième terme intégral de la relation (21′). On peut montrer que les relations (28) font correspondre à tout point $[u_0, ..., u_n, \varphi]$ de l'ensemble E un point $[v_0, ..., v_n, \psi]$ du même ensemble, si les constantes du problème T, m_F, m'_F, m_G, m'_G, m_f, k_G sont suffisamment petites. On peut montrer ensuite que l'ensemble transformé E' de l'ensemble E est *compact* et que la transformation (28). est *continue* dans l'espace A. Nous en concluons, en vertu du théorème de Schauder, l'existence dans l'ensemble E d'un point $[u_0^*, ..., u_n^*, \varphi^*]$ invariant relativement à la transformation (28). La fonction obtenue $u_0^*(X, t)$ vérifie l'équation (1) en tout point $X \in \Omega$ pour $0 < t < T$, la condition limite (9) en tout point $P \in S$, pour $0 < t \leqslant T$ et la condition initiale (12) en tout point de continuité X de la fonction f.

La fonction $u_0^*(X, t)$ est donc une solution du problème proposé.

Les démonstrations plus détaillées seront publiées dans le Ricerche di Matematica.

INSTITUT MATHÉMATIQUE, ACADÉMIE POLONAISE DES SCIENCES
(INSTYTUT MATEMATYCZNY, PAN)

OUVRAGES CITÉS

[1] W. Pogorzelski, *Problèmes aux limites aux dérivées tangentielles pour l'équation parabolique*, Ann. Ec. Norm. Sup., **75** (1958).

[2] — , *Sur certaines propriétés des intégrales analogues aux potentiels et un problème aux limites pour l'équation parabolique*. Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. sci. math., astr. et phys. **8** (1960), 53.

[3] — , *Étude de la solution fondamentale de l'équation parabolique*, Ricerche di Matematica, **5** (1956).

BULLETIN DE L'ACADÉMIE
POLONAISE DES SCIENCES
Série des sci. math., astr.
et phys. — Vol. VIII, No. 6, 1960

MATHEMATICS

A Theorem on B_0 Division Algebras

by

W. ŻELAZKO

Presented by S. MAZUR on April 14, 1960

A B_0 algebra is a completely metrizable locally convex topological algebra over the real or complex field. A B_0 algebra is called B_0 division algebra, if for every element $x \neq 0$, there exists an inverse x^{-1}.

In his paper [1] Arens proved that, if in any B_0 division algebra the operation of taking inverse is continuous on the set of non zero elements, then it satisfies the conclusion of Mazur's theorem ([2], Theorem 2), i.e. it is isomorphic and homeomorphic either with the field of real numbers, or with the field on complex numbers, or with the division algebra of real quaternions. Applying a theorem of Mongomery ([3], Theorem 2), Arens obtained the conclusion of Mazur's theorem for every separable B_0 division algebra. Montgomery's theorem states that, if G is a locally complete *) separable metric space, which at the same time is a group with multiplication xy, which is continuous in the metric of G, is a metric group, i.e. the inversion x^{-1} is continuous in G.

Here this result will be obtained for every Abelian not necessarily separable group G. Hence, applying Arens' theorem we get the conclusion of Mazur's theorem for every B_0 field. The non-commutative case will be easily obtained as a corollary. Hence, we get the solution of Problem 2 stated in [5].

THEOREM 1. *Let G be an Abelian group which is at the same time a locally complete metric space with the metric $\varrho(x, y)$. We design the group operation by xy, the unit element by e and assume that the group operation is separately continuous in the metric ϱ. Then the operation x^{-1} of taking inverse is continuous in G.*

Proof. It is obvious that it is sufficient to prove that, if (x_n) is a sequence of elements of G tending to the unit e, then there exists a subsequence $(\overline{x}_n)$ of this sequence such that $(\overline{x}_n^{-1})$ tends to e. The sub-

*) i.e. every point of G is an interior point of a complete subset of G.

sequence $(\overline{x}_n)$ will be defined by an induction. Suppose, that x_1 is an element of the sequence (x_n) such that

$$\varrho(\overline{x}_1, e) \leqslant c,$$

where $2c$ is the radius of a complete sphere in G having e as its centre. Assume also that the elements $\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}$ are chosen in such a way that

$$\varrho(p_k, p_{k+1}) \leqslant \frac{c}{2^{k+1}}, \tag{1}$$

$$\varrho(q_{s,k}, q_{s,k+1}) \leqslant \frac{c}{2^{k+1}} \tag{2}$$

$$\text{for } k = 1, 2, \ldots, n-1, \quad s = 1, 2, \ldots, n-1, n, \ldots,$$

where

$$p_k = \overline{x}_1 \cdot \overline{x}_2 \cdot \ldots \cdot \overline{x}_k,$$

$$q_{s,k} = \begin{cases} \overline{x}_1 \cdot \ldots \cdot \overline{x}_{s-1} \cdot \overline{x}_{s+1} \cdot \ldots \cdot \overline{x}_k & \text{for } 1 < s < k, \\ p_{k-1} & \text{for } s = k \\ p_k & \text{for } s > k. \end{cases}$$

The possibility of choosing the suitable element $\overline{x}_{n+1}$ follows from the fact that the sequence x_n tends to the unit e, and that there is only a finite number of relations of the form (1) and (2).

We assume, of course, that $\overline{x}_{n+1}$ is a later term of sequence (x_n), than $\overline{x}_n$, and that it satisfies the relations (1) and (2) for $k = n$.

It is evident, that the limits

$$p = \lim_{k=\infty} p_k$$

and

$$q_s = \lim_{k=\infty} q_{s,k}$$

exist

By (1) and (2) we have

$$\varrho(p, p_k) \leqslant \frac{c}{2^k} \quad \text{for} \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{3}$$

and

$$\varrho(q_s, q_{s,k}) \leqslant \frac{c}{2^k} \quad \text{for} \quad s, k = 1, 2, \ldots. \tag{4}$$

We also have

$$\varrho(p, q_s) \leqslant \varrho(p, q_{s,s}) + \varrho(q_s, q_{s,s}) = \varrho(p, p_{s-1}) + \varrho(q_s, q_{s,s}) < \frac{c}{2^{s-1}} + \frac{c}{2^s} < \frac{c}{2^{s-2}}.$$

It follows that

$$p = \lim_{s=\infty} q_s.$$

On the other hand

$$\overline{x}_s^{-1} = p^{-1} q_s.$$

Hence, there exists the limit

$$\lim_{s=\infty} \overline{x}_s^{-1} = p^{-1} \lim_{s=\infty} q_s = e.$$

COROLLARY 1. *A group G satisfying the assumptions of Theorem 1 is a metric group.*

COROLLARY 2. *If R is a B_0 field, then it is isomorphic and homeomorphic either with the field of real numbers, or with the field of complex numbers.*

THEOREM 2. *Let R be a real B_0 division algebra, then it is isomorphic and homeomorphic either with the field of real numbers, or with the field of complex numbers, or with the division algebra of real quaternions.*

Proof. Let $x \in R$. Let $\mathcal{R}(x)$ be the family of all commutative subalgebras of R containing element x. We may assume $\mathcal{R}(x)$ as a partially ordered system with inclusion as order relation. It is evident that $\mathcal{R}(x)$ as a partially ordered system satisfies the assumptions of Zorn's lemma. Hence, there exists a maximal commutative subalgebra $R(x)$ containing the element x. It may be easily verified that $R(x)$ must be a complete subfield of R. Hence, by Corollary 2, we see that the element x is the root of a polynomial with real coefficients. It follows, that every element of R satisfies such a polynomial and the desired conclusion may be obtained as a consequence of the Frobenius theorem.

Remark. A similar theorem is false without the asssumption of completness of the division algebra.

A counter-example has been constructed by Williamson [4].

INSTITUTE OF MATHEMATICS, POLISH ACADEMY OF SCIENCES
(INSTYTUT MATEMATYCZNY, PAN)

REFERENCES

[1] R. Arens, *Linear topological division algebras*, Bull. Amer. Math. Soc., **53** (1947), 623—630.

[2] S. Mazur, *Sur les anneaux linéaires*, C. R. Paris, **207** (1938), 1025—1027.

[3] D. Montgomery, *Continuity in topological groups*, Bull. Amer. Math. Soc., **42** (1936), 879—882.

[4] J. H. Williamson, *On topologising of the field C(t)*, Proc. Amer. Math. Soc., **5** (1954), 729—734.

[5] W. Żelazko, *On the locally bounded and m-convex topological algebras*, Studia Math. **19** (1960), 333—356.

BULLETIN DE L'ACADÉMIE
POLONAISE DES SCIENCES
Série des sci. math., astr.
et phys. — Vol. VIII, No. 6, 1960

MATHEMATICS

Remarks on a Class of Analytic Functions

by

J. ZAMORSKI

Presented by E. MARCZEWSKI on April 20, 1960

Let T denote the class of the analytic functions in the ring $0<|z|<1$ which satisfy in it the differential equation

$$\frac{zf'(z)}{f(z)} = \alpha p(z) + \beta, \tag{1}$$

where α and β are any complex numbers and $p = 1 + \alpha_1 z + \ldots$ satisfies the inequality $\operatorname{re} p > 0$. We can easily see that the functions of the class T have to be of the following form

$$f(z) = cz^{\alpha-\beta} \exp\left\{\alpha \int_0^z \frac{p(z)-1}{z}\, dz\right\} = cz^{\alpha+\beta}\left\{1 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k\right\}, \quad c = \text{const.} \tag{2}$$

Let $T_{\alpha,\beta}$ be a subclass of the class T obtained by the fixation of numbers α and β and putting $c = 1$.

In particular, $T_{1,0}$ will be identical with the class of all the regular starlike schlicht functions, and $T_{-1,0}$ will be identical with the class of all meromorphic, starlike schlicht functions. If we put $\alpha = \varrho = 1/(1 - ai)$, $\beta = 1 - \varrho$ (real a), we obtain the class of Špaček's spiral, schlicht functions [6] and putting $\alpha = -\varrho$, $\beta = -1 + \varrho$ we obtain the class of spiral, meromorphic schlicht functions. Class $T_{p\varrho,\, p(1-\varrho)}$ is a certain subclass (integral p) of the class of p-valent functions. Every class $T_{p,q}$ (real p, real q, sign p = sign q, integral $p+q$) is a class of starlike and regular or meromorphic functions.

Let E be a real function of the class c_1, depending on $2n$ real variables $x_n + iy_k = a_k$. This function is defined in a domain containing the n-th variability region of the coefficients of functions of the class $T_{\alpha,\beta}$. Moreover, let

$$(\operatorname{grad} E)^2 > 0. \tag{3}$$

Function E will be regarded as a functional defined on functions of the class $T_{\alpha,\beta}$ and will be written $E = E(f)$.

THEOREM 1. *A function of the class $T_{\alpha,\beta}$ for which the functional $E(f)$ attains its extremal value is of the form*

$$f(z) = z^{\alpha+\beta}\left[\prod_{k=1}^{n}(1-\sigma_k z)^{-\beta_k}\right]^{\alpha},$$

where

$$|\sigma_k| = 1, \quad \beta_k > 0, \quad \sum_{k=1}^{n}\beta_k = 2.$$

Proof. It easily results from (1) that there is homeomorphism between the n-th variability region of the coefficients of functions with positive real part and the n-th variability region of the coefficients of functions of the class $T_{\alpha,\beta}$.

Hence, and from (3) we can easily see that the extremal functions of the class $T_{\alpha,\beta}$ correspond to the boundary functions of the class of functions with positive real part and *vice versa*. In view of [1] these functions are of the form:

$$p(z) = 1 + \sum_{k=1}^{n}\beta_k\frac{\sigma_k z}{1-\sigma_k z}. \tag{4}$$

Putting the function (4) into (2) and integrating we complete the proof of Theorem 1. This theorem has been known for starlike functions (see [7] and for some particular functionals [3], [5]) and for spiral functions [10].

THEOREM 2. *Parameters σ_k and β_k denoting the extremal function in the class $T_{\alpha,\beta}$ for the functional $E(f)$ satisfy the following system of equations*

$$A_n\sigma_k^{2n} + \cdots + A_1\sigma_k^{n+1} + \lambda\sigma_k^n + \bar{A}_1\sigma_k^{n-1} + \cdots + A_n = 0$$

$$2nA_n\sigma_k^{2n-1} + \cdots + (n+1)A_1\sigma_k^n + n\lambda\sigma_k^{n-1} + (n-1)\bar{A}_1\sigma_k^{n-2} + \cdots + A_{n-1} = 0$$

$$\sum_{k=1}^{n}\beta_k = 2, \quad \beta_k > 0, \quad |\sigma_k| = 1, \quad k = 1, \ldots, n,$$

where

$$A_j = \alpha\frac{1}{j}\sum_{k=0}^{n-j}a_k\left\{\frac{\partial E}{\partial x_{k+j}} - i\frac{\partial E}{\partial y_{k+j}}\right\}.$$

Proof. We see from Theorem 1 that the problem of determining the extremum for the functional $E(f)$ comes to the problem of determining the extremum for the function $E(\beta_1, \ldots, \beta_n; \sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ on additional condition that $\sum_{k=1}^{n}\beta_k = 2$. A simple calculus gives the proof of the theorem. This theorem has been known for starlike [7] and spiral [10] functions. These equations allow to set in some cases an extremal function for the given functional [9].

THEOREM 3. *A function of the class $T_{\alpha,\beta}$ extremal with respect to the functional $E(f)$ satisfies the following differential function equations*

$$\frac{z f'(z) - \beta f(z)}{f(z)} P_i(z) = Q_i(z) \qquad i = 1, 2,$$

where

$$P_1(z) = \sum_{j=1}^{n} \frac{j A_j}{z^j} - \sum_{j=1}^{n} j \bar{A}_j z^j, \qquad P_2(z) = \sum_{j=1}^{n} \frac{A_j}{z^j} + \lambda + \sum_{j=1}^{n} A_j z^j,$$

$$Q_1(z) = \alpha \left[\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{z^j} \sum_{k=0}^{n-j} a_k (k+j) A_{k+j} + \sum_{k=1}^{n} k a_k A_k + \sum_{j=1}^{n} z^j \sum_{k=0}^{n-j} a_k (k+j) \bar{A}_{k+j} \right],$$

$$Q_2(z) = \alpha \left[\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{z^j} \sum_{k=0}^{n-j} a_k A_{k+j} + i \operatorname{Im} \sum_{k=1}^{n} a_k A_k - \sum_{j=1}^{n} z^j \sum_{k=0}^{n-j} a_k \bar{A}_{k+j} \right],$$

$$a_k = \frac{(-1)^{k-1}}{\alpha} \begin{vmatrix} a_1, & 1, & 0, & \ldots, & 0 \\ 2a_2, & a_1, & 1, & \ldots, & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ k a_k, & a_{k-1}, & a_{k-2}, & \ldots, & a_1 \end{vmatrix}, \quad a_0 = 1.$$

The proof follows simply from Theorems 1 and 2. It is sufficient to remark that $(z f'(z) - \beta f(z))/f(z)$ may be extended, for an extremal function, onto the whole plane as a rational function having only simple poles at the points for which $P_i(z) = 0$. A simple calculation will prove the rest. This theorem has been known for starlike functions (see [8] and in one particular case [3]).

Now we shall write three theorems concerning the estimation of the coefficients of a function of the class $T_{\alpha,\beta}$.

THEOREM 4. *The developmental coefficients of a function of the class $T_{\alpha,\beta}$, where* $\operatorname{re} \alpha \geqslant 0$, *satisfy the following inequality*

$$|a_n| \leqslant \frac{1}{n!} \prod_{k=0}^{n-1} |2\alpha + k|.$$

Equality holds for the coefficients of the function

$$f(z) = z^{\alpha+\beta} (1 + \eta z)^{-2\alpha}, \qquad |\eta| = 1.$$

THEOREM 5. *The developmental coefficients of a function of the class $T_{\alpha,\beta}$, where* $\operatorname{re} \alpha \leqslant -|\alpha|^2$, *satisfy the following inequality*

$$|a_n| \leqslant \frac{2}{n} |\alpha|.$$

Equality holds for the coefficients of the function

$$f(z) = z^{\alpha+\beta} (1 + \eta z^n)^{-\frac{2\alpha}{n}}.$$

THEOREM 6. *Suppose that* $-|\alpha|^2 < \operatorname{re}\alpha < 0$ *and suppose that* N *is the maximal natural number such that* $N \operatorname{re}\alpha \geqslant -|\alpha|^2$. *The developmental coefficients of a function of the corresponding class* $T_{\alpha,\beta}$ *satisfy the inequalities*

$$|a_n| \leqslant \frac{1}{n!}\prod_{k=0}^{n-1}|2\alpha+k|, \qquad n=1,\ldots,N; \tag{I}$$

$$|a_n| < \frac{1}{nN!}\prod_{k=0}^{N-1}|2\alpha+k|, \qquad n=N+1,\ldots. \tag{II}$$

Equality holds in (I) for the coefficients of the function

$$f(z) = z^{\alpha+\beta}(1+\eta z)^{-2\alpha}, \qquad |\eta| = 1.$$

We can prove the above three theorems modifying J. Clunie's method for the estimation of the coefficients of starlike, meromorphic functions [2]. These estimations are known for starlike regular functions (cf. [4] p. 367), for starlike meromorphic functions [2] and for spiral functions [10].

The very interesting problem of finding out the sharp estimation for inequality (II) (Theorem 6) remains to be solved.

INSTITUTE OF MATHEMATICS, POLISH ACADEMY OF SCIENCES
(INSTYTUT MATEMATYCZNY, PAN)

REFERENCES

[1] C. Carathéodory, *Über den Variabilitätsbereich der Fourierschen Konstanten von positiven harmonischen Functionen*, Rend. Circ. Mat. Palermo, **32** (1911), 193—217.

[2] J. Clunie, *On meromorphic schlicht functions*, Journ. London Math. Soc., **34** (1959), 115—116.

[3] J. A. Hummel *A variational method for starlike functions*, Proc. Am. Math. Soc., **9** (1958), 82—87.

[4] F. Leja, *Teoria funkcji analitycznych*, Warsaw, 1957.

[5] Z. Nehari and E. Nethanyahu, *On the coefficients of meromorphic schlicht functions*, Proc. Am. Math. Soc., **8** (1957), 15—23.

[6] L. Špaček, *Přispěvek k teorii funkcí prostych*, Časopis Pěst. Mat., **62** (1933), 12—19.

[7] J. Zamorski, *Equations satisfied by the extremal starlike functions*, Ann. Polon. Math., **5** (1958), 285—291.

[8] — , *Differential equations for the extremal starlike functions*, Ann. Polon. Math., **7** (1959), 279—283.

[9] — , *The estimation of the third coefficient of the starlike function with a pole*, Ann. Polon. Math., **8** (1960), 185—191.

[10] — , *About the extremal spiral schlicht functions*, Ann. Polon. Math., **9** (1961), in press.

BULLETIN DE L'ACADÉMIE
POLONAISE DES SCIENCES
Série des sci. math., astr.
et phys. — Vol. VIII, No. 6, 1960

MATHEMATIK

Eine Bemerkung zur allgemeinen Eigenfunktionsentwicklungen für vertauschbare Operatorensysteme beliebiger Mächtigkeit

von

K. MAURIN

Vorgelegt von A. MOSTOWSKI am 27. April 1960

Einführung

In einer Reihe von Abhandlungen (für Literaturangaben siehe [2]) hat der Verfasser dem Eigenentkwicklungssatze und den Spektralsätzen vom Typus Herglotz-Bochner-Berezanski-Lehmann eine allgemeine Fassung zu geben versucht. Verallgemeinerte Eigenfunktionen waren in dieser Fassung lineare, stetige Funktionale auf einem lokalkonvexen Raum Φ. Die Menge Φ war in dem separablen Hilbertschen Raume H dicht. Als eine Grundvoraussetzung diente die Nuklearität der Einbettung $I: \Phi \to H$. Diese starke Voraussetzung bringt aber einen doppelten Nachteil mit sich, nämlich die Nuklearität der Einbettung des ganzen Raumes Φ ist in konkreten Fällen schwer nachweisbar und im Falle des nichtabzählbaren vertauschbaren Systems der selbstadjungierten Operatoren ist die *Konstruktion* eines nuklearen Raumes Φ dem Verfasser unbekannt. Jedoch scheinen die physikalische Anwendungen (Quantenfeldtheorie) den nichtabzählbaren Fall zu verlangen.

Wenn man den in [2] angeführten Beweis analysiert, sieht man, dass man eigentlich die Nuklearität der Einbettung $I: \Phi \to H$ fallen lassen kann, wenn man die — in Anwendungen ausschiesslich auftretenden — induktiven Limites $\Phi = l \cdot \operatorname{ind}_{\beta \in B}$ (z. B. direkte Summen $\Phi = \bigoplus_{\beta} \Phi_\beta$) der Unterräume $\Phi_\beta \subset H$ betrachtet, von denen man weisst, dass die kanonischen Einbettungen $i_\beta: \Phi_\beta \to H$ nuklear sind (siehe unten: Satz 1. und Korollar).

Auf diese Weise kann man den allgemeinen Fall vertauschbarer Systeme beliebiger Mächtigkeit behandeln (Satz 2). Die Voraussetzungen nehmen dabei eine Form an, die in Anwendungen viel leichter als bisher nachweisbar sind. Diesen letzen soll eine andere gemeinsam mit L. Maurin verfasste Note vorbehalten sein.

1. Allgemeine Eigenfunktionsentwicklungen

SATZ 1. *Es sei H ein separabler Hilbertscher Raum und*

$$H \ni u \to Fu = \hat{u} \in \hat{H} = \int_{\Lambda} \hat{H}(\lambda)\, d\mu(\lambda)$$

durch ein vertauschbares System $\mathcal{A}$ selbstadjungierter Operatoren in H induzierte Fouriertransformation. Es sei, weiter,

$$H \supset \Phi = l\text{-}\operatorname{ind}_{\beta \in B} \Phi_\beta, \quad \Phi_\beta \subset H$$

der induktive Limes der Lokalkonvexen Räume Φ_β, wobei Φ_β Unterräume von H sind [1] *(Φ kann z. B. eine direkte Summe $H \supset \Phi = \bigoplus_\beta \Phi_\beta$, $\Phi_\beta \subset H$ mit der üblichen lokalkonvexen Topologie sein). Falls die Einbettungen*

$$i_\beta : \Phi_\beta \to H, \ \beta \in B$$

nuklear sind, dann ist die lineare Abbildung

$$\Phi \ni \varphi \to (F\varphi)(\lambda) = \hat{\varphi}(\lambda) = e(\lambda)(\varphi), \quad \lambda \in \Lambda$$

(für μ — f. a. λ) stetig. Wir schreiben dann

$$e(\lambda)\varphi = \hat{\varphi}(\lambda) = \langle \varphi, e(\lambda) \rangle,$$

genauer

$$e(\lambda) = (e_1(\lambda), e_2(\lambda), \ldots, e_{\dim \hat{H}(\lambda)}(\lambda)), \ \hat{\varphi}_k(\lambda) = \langle \varphi, e_k(\lambda) \rangle,$$

wo $e_k(\lambda) \in \Phi'$, $k = 1, 2, \ldots, \dim \hat{H}(\lambda)$. Falls $\varphi \in D(A)$, $A \in \mathcal{A}$, dann kann man $e(\lambda)$ als (verallgemeinerte) Eigenelemente des Operators A betrachten: $\langle A\varphi, e(\lambda) \rangle = \hat{A}(\lambda) \langle \varphi e(\lambda) \rangle$, $\hat{A}(\lambda) \in E^1$.

Beweis. Da die Abbildung $F : H \to \hat{H}$ unitär ist, ist $F \circ i_\beta : \Phi_\beta \to \hat{H}$, $\beta \in B$ nuklear. Aus dem Lemma 1 in [2] folgt also, dass

$$\Phi_\beta \ni \varphi \to \hat{\varphi}(\lambda) \in \hat{H}(\lambda)$$

für μ — f. a. λ stetig ist. Daher ist die lineare Abbildung

$$e(\lambda) : \Phi \to \hat{H}(\lambda)$$

stetig (da $\Phi = l\text{-}\operatorname{ind} \Phi_\beta$)

KOROLLAR 1. *Es sei $H \supset \Phi = \bigoplus_\beta \Phi_\beta$, $\Phi_\beta \subset H$ eine topologische direkte Summe der Unterräume Φ_β von H. Falls die lineare Abbildung $F : \Phi \to \hat{H}$ auf jedem Unterraum Φ_β nuklear ist, dann ist die lineare Abbildung*

$$e(\lambda) : \varphi \to F\varphi(\lambda) = \hat{\varphi}(\lambda) = e(\lambda)\varphi$$

stetig auf Φ.

Bemerkung. Falls alle $A \in \mathcal{A}$ den Raum Φ stetig in sich abbilden, dann sind $e(\lambda)$ gemeinsame Eigenelemente von A:

$$\langle A\varphi, e_k(\lambda)\rangle = \langle \varphi, A' e_k(\lambda)\rangle = \hat{A}(\lambda)\langle \varphi, e_k(\varphi)\rangle, \quad \varphi \in \Phi$$

d. h.

$$A' e_k(\lambda) = \hat{A}(\lambda) e_k(\lambda), \qquad k = 1, \ldots, \dim \hat{H}(\lambda).$$

2. Konstruktion des Raumes Φ für vertauschbare Systeme $\mathcal{A}$ beliebiger Mächtigkeit

Da die obige Fassung des Eigenfunktionsentwicklungssatzes die Nuklearität der Menge Φ fallen liess, können wir jetzt die Konstrukion des in obigen Sätzen verlangten Raumes auch für vertauschbare Systeme *beliebiger* Mächtigkeit ausführen. Erst diese Konstruktion zeigt, dass die Voraussetzungen des Satzes 1 und der Bemerkung immer erfüllt sind. Es gilt nämlich der folgende:

Satz 2. *Es sei $\mathcal{A}$ eine vertauschbare Menge selbstadjungierter (allgemeiner: normaler) Operatoren, deren beliebige Superpositionen A_α einen in H dichten Durchschnitt D_0 haben. Dann gibt es einen in D_0 dichten Raum Φ, der die Voraussetzungen des Satzes 1 erfüllt und den die Operatoren A stetig in sich abbilden.*

Beweis. Es sei $(v_j)_1$ ein ortonormales System in D_0. $[v_j]$ bedeutet den auf dem Vektor v_j aufgespannten Raum. Es sei $\Phi_{\alpha,j} = A_\alpha[v_j]$, wo A_α eine beliebige endliche Superposition der Operatoren aus A bedeutet. Es sei schliesslich Φ die lineare algebraische Hülle der Unterräume $\Phi_{\alpha,j}$. Wir statten den Raum Φ mit der stärksten lokalkonvexen Topologie τ_ω aus. Dies kann folgendermassen geschehen (vgl. [1]) Es sei $(e_\beta)_{\beta \in B}$ eine (algebraische) Basis von Φ; dann ist

$$\Phi \overset{\mathrm{df}}{=} \bigoplus_\beta [e_\beta]$$

der lokalkonvexe lineare Unterraum von H mit allen verlangten Eigenschaften.

Bemerkung. In konkreten Fällen muss man natürlich in Φ eine schwächere Topologie einzuführen versuchen. Solche Topologie muss stärker sein als die grobste Topologie, in welcher lineare Funktionale $e_k(\lambda)$, $k = 1, 2, \ldots, \dim \hat{H}(\lambda)$ noch stetig sind und schwächer als die oben „konstruierte" τ_ω.

Korollar 2. *Der Satz* 1 *(und die Bemerkung) gilt für vertauschbare Systeme $\mathcal{A}$ beliebiger Mächtigkeit mit dichtem D_0.*

MATHEMATISCHES INSTITUT, POLNISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
(INSTYTUT MATEMATYCZNY, PAN)

SCHRIFFTUM

[1] H. Bourbaki, *Espaces vectorielles* (Chap. II), Paris 1953.

[2] K. Maurin, *Allgemeine Eigenfunktionsentwicklungen. Spektraldarstellung abstrakter Kerne. Eine Verallgemeinerung der Distributionen auf Lie'schen Gruppen*, Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. sci. math., astr. et phys., **7** (1959), 471—479.

Anmerkung

Bei Gelegenheit wollen wir zwei Fehler in unseren früheren Mitteilungen gutmachen und zwar:

1. in der Abhandlung

Bemerkungen über das Spektrum und Eigenfunktionen (links) invarianter Differentialoperatoren auf Lie'schen Gruppen, (**8** (1960), 3—9) soll man im Titel anstatt (links) — (rechts) lesen. Dasselbe gilt für Seite 17;

2. in der Abhandlung

Eine Abschätzung für Eigenfunktionen..." (**7** (1959), 337—341) die Definition soll wie folgt lauten:

Definition: Eine Funktion $f(x, \lambda) \geqslant$ heisst schwach beschränkt falls $(0 \leqslant h(\cdot), \int h(x)\,dx < \infty) \Rightarrow (\int f(x, \lambda)\, h(x)\,dx < \infty)$ für $\lambda \in N(h)$; $(N(h)$ ist eine von h-abhängige Nullmenge).

Dann sin alle Sätze und Korolläre richtig mit „schwach beschränkt" anstatt „beschränkt".

BULLETIN DE L'ACADÉMIE
POLONAISE DES SCIENCES
Série des sci. math., astr.
et phys. — Vol. VIII, No. 6, 1960

MATHÉMATIQUE

Recherche sur les propriétés de la solution du système parabolique d'équations

par

H. MILICER-GRUŻEWSKA

Présenté par T. WAŻEWSKI le 28 avril, 1960

La communication que voici présente un rapport sur des diverses propriétés des solutions du système parabolique d'équations aux derivées partielles aux coefficients höldériens. Ce seront des conséquences souvent presque immédiates: 1) ou bien de la définition même de la matrice fondamentale d'un tel système *) [2] - [5], 2) ou bien des théorèmes d'unicité de solutions de ce système [6], [7] et de leurs propriétés probabilistes [8].

C'est grâce à ces résultats qu'il fût possible de résoudre la question suivante: Peut-on généraliser les théorèmes connus de M. Picone, formulés si élégamment, concernant les signes et les valeurs extrêmales de la solution de l'équation parabolique du second ordre de façon à les faire valoir pour la solution du système parabolique en question?

Pour le système du second ordre sans termes linéaires la réponse est affirmative, mais pour le cas seulement, où les composantes de la valeur initiale de sa solution sont égales entre elles.

Par contre, si au moins une de ces composantes est différente, les théorèmes de M. Picone, aussi bien sur les signes que sur les valeurs extrêmales de la solution, ne peuvent être appuiqués à la solution du système.

1. Soient E l'espace euclidien à n dimensions de points $X = (x_1, \dots x_n)$; le temps t — la variable non-négative et bornée $(0 \leqslant t \leqslant T = \text{const.})$: $\mathcal{E} = (E * \langle 0, T \rangle)$ — leurs produit cartésien et soit enfin

$$(1{,}1) \qquad \hat{\psi}^{(\alpha)}(u_1, \dots, u_N) = \sum_{1 \leqslant j \leqslant N} \sum_{0 \leqslant \delta \leqslant M} A_{\alpha j}^{k_1, \dots, k_n}(X, t) \frac{\partial^{\delta} u_j}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}} - \frac{\partial u_\alpha}{\partial t} = 0,$$

$0 \leqslant k_i \leqslant M$, $\delta = k_1 + \dots + k_n$, $X \in E$, $0 < t \leqslant T$, $\alpha = 1, \dots, N$, $N > 1$; $M > 1$, le système parabolique en question, où $u_1(X, t), \dots, u_N(X, t)$ sont les composantes de la solution $(u_1, \dots, u_N)$.

*) Pour les solutions des systèmes paraboliques aux hypothèses moins génerales, ou moins accomplies voir p. ex. [10] ou [11].

On suppose, ainsi que dans la note [2], que les coefficients sont soumis aux hypothèses suivantes:

I. Les coefficients du système (1, 1) sont bornés et continus dans $\mathcal{E}$. Ils sont höldériens par rapport à la variable spatiale X, et les coefficients des dérivées d'ordre M sont, de plus, höldériens par rapport au temps t, à savoir:

$$(2,1)\qquad |A_{\alpha j}^{k_1,\dots,k_n}(X,t) - A_{\alpha j}^{k_1,\dots,k_n}(Y,\tau)| \leqslant \begin{cases} c\,[\,|XY|^h + |t-\tau|^{h'}], & \mathcal{S} = M \\ c\,[\,|XY|^h, & 0 \leqslant \mathcal{S} < M,\ t = \tau, \end{cases}$$

$$(X,t),\ (Y,\tau) \in \mathcal{E};\ \alpha, j = 1,\dots,N,\ 0 \leqslant \mathcal{S} = k_1 + \cdots + k_n \leqslant M;$$
$$0 \leqslant k_l \leqslant M,\ l = 1,\dots,n.$$

II. Le système (1, 1) est parabolique selon Petrovsky ([9] et [2], formules (5), (6) et [7]).

Outre ces deux hypothèses, on admettra plus tard, pour $M = 2$, l'hypothèse suivante:

III. Les formes quadratiques:

$$(3,1)\qquad \sum_{0 \leqslant k_l \leqslant 2}^{\mathcal{S}=2} \sum_{j=1}^{N} A_{\alpha j}^{k_1,\dots,k_n}(X,t)\, s_1^{k_1},\dots,s_n^{k_n},\quad \alpha = 1,\dots,N$$

sont définies positives.

Au cas du système d'équations non homogènes on désignera leurs partie droite par $F_\alpha(X,t)$ en écrivant:

$$(4,1)\qquad \hat{\psi}_{(u_1,\dots,u_N)}^{(\alpha)} = F_\alpha(X,t),\quad \alpha = 1,\dots,N.$$

On posera pour les composantes de la valeur initiale de la solution du sytème la fonction: $(f_1(X),\dots,f_N(X))$, $X \in E$, et on admettra l'hypothèse suivante aussi bien pour la fonction $(F_1,\dots,F_N)$ que pour fonction initiale: $(f_1,\dots,f_N)$:

IV. Les fonctions $(F_1,\dots,F_N)$ et $(f_1,\dots,f_N)$ sont bornées et continues dans $\mathcal{E}$ et höldériennes par rapport à la variable spatiale X dans E:

Il arrive qu'il est utile de construire un système adjoint au système (1, 1). Dans ce cas on admettra l'hypothèse suivante:

V. Les dérivées

$$(5,1)\qquad \frac{\partial^{\mathcal{S}'} A_{j\alpha}^{k_1',\dots,k_n'}(X,t)}{\partial x_1^{k_1}\dots\partial x_n^{k_n}} = A_{\alpha j}^{*k_1',\dots,k_n'}(X,t), \qquad \begin{matrix} k_1+\cdots+k_n = \mathcal{S},\quad 0 \leqslant \mathcal{S} \leqslant M \\ k_1'+\cdots+k_n' = \mathcal{S}',\quad 0 \leqslant \mathcal{S}' \leqslant M \end{matrix}$$

existent, sont continues dans $\mathcal{E}$ et höldériennes par rapport à la variable spatiale $X \in E$; au cas, où $\mathcal{S} = 0$, $\mathcal{S}' = M$, elles sont aussi höldériennes par rapport au temps t (voir hypothèse I).

Soient N solutions fondamentales et N quasi solutions [2] du système (1, 1):

$$(6,1)\qquad (\Gamma_{\alpha 1},\dots,\Gamma_{\alpha N}) \qquad (W_{\alpha 1}^{Y,\tau},\dots,W_{\alpha N}^{Y,\tau}).$$

La parité des racines de l'équation de Petrovsky

Comme un corollaire immédiat de la définition de l'équation de Petrovsky pour le système parabolique de second ordre ($M = 2$) et du par. 5 de [8], nous pouvons formuler le théorème suivant:

THÉORÈME (1,2). *Pour que la parité par rapport à chaque variable réelle $s_1, ..., s_n$, de toutes les racines $\lambda_1, ..., \lambda_{N_1}$; $N_1 \leqslant N$ de l'équation de Petrovsky du système parabolique d'équations du second ordre existe, il faut et il suffit que les coefficients des dérivées du second ordre par rapport aux différentes variables spatiales soient nulles, hypothèses I et II étant admises.*

La généralisation des théorèmes d'unicité et ses conséquences

THÉORÈME (1,3). *Les hypothèses I, II et IV étant admises, les solutions $(u_1, ..., u_N)$ du systéme (1, 1) qui appartiennent à la classe d'unicité Z_1 ou Z_1' avec la même fonction initiale $(f_1, ..., f_N)$ sont identiques.*

THÉORÈME (2,3). *Les hypotèses I, II et IV étant admises, la solution unique du système (4, 1) qui appartient à la classe Z_1' avec la fonction initiale $(f_1, ..., f_N)$ est de la forme:*

$$(1,3) \qquad u_\alpha(X,t) = \int_E \sum_{l=1}^{N} \Gamma_{\alpha l}(X,t;Y,0)\, f_l(Y)\, dY - \int_0^t \int_E \sum_{l=1}^{N} \Gamma_{\alpha l}(X,t;Y,\tau)\, F_l(Y,\tau)\, dY\, d\tau.$$

THÉORÈME (3,3). *Les hypotèses I et II étant admises, la différence de l'intégrale de Poisson-Weierstrass, de densité unitaire et du potential de charge spatiale, constituée par les coefficients linéaires du système parabolique (1, 1) est identiquement égale à un.*

On a notamment:

$$(2,3) \qquad \int_E \sum_{\beta=1}^{N} \Gamma_{\alpha\beta}(X,t;Y,0)\, dY - \int_0^t \int_E \sum_{\beta=1}^{N} \Gamma_{\alpha\beta}(X,t;Y,\tau) \sum_{j=1}^{N} A_{\beta j}^{0,\ldots,0}(Y,\tau)\, dY\, d\tau \equiv 1$$

et aussi les formules bien utiles:

$$(3,3) \qquad \int_E \Gamma_{\alpha l}\, dY - \int_0^t \int_E \sum_{\beta=1}^{N} \Gamma_{\alpha\beta}\, A_{\beta l}^{0,\ldots,0}\, dY\, d\tau \equiv \begin{cases} 0, & \alpha \neq l, \\ 1, & \alpha = l. \end{cases}$$

THÉORÈME (4,3). *Admettons les hypothèses I, II et III ($M = 2$).*

Soit $w_\alpha^{Y,\tau}(X,t;Y,\tau)$ la quasi-solution de l'équation:

$$(4,3) \qquad \sum_{i \leqslant j=1}^{n} \left[\sum_{1 \leqslant \beta \leqslant N}^{\delta=2} A_{\alpha\beta}^{k_1,\ldots,k_n}(X,t) \right] \frac{\partial^2 u}{\partial x_i\, \partial x_j} - \frac{\partial u}{\partial t} = 0, \quad 1 \leqslant \alpha \leqslant N.$$

On a N formules asymptotiques:

$$(5,3)\qquad \left[\sum_{\beta=1}^{N} W_{\alpha\beta}^{Y,\tau}(X,t;Y,\tau)\right] - w_{\alpha}^{Y,\tau}(X,t;Y,\tau) \to 0, \quad t-\tau \to 0, \quad \alpha = 1,\ldots,N$$

uniformément pour rapport à X et Y dans E dès que $0 < a \leqslant |XY| \leqslant b$, $t-\tau \leqslant b$, *les constantes a et b étant suffisament petites.*

Le système adjoint au système parabolique (1,1)

THÉORÈME (1,4). *Admettons les hypotèses I, II et V. Le système adjoint au système* (1,1) *est parabolique et on obtient la matrice de ses solutions fondamentales en changeant l'emplacement des indices dans chaque solution fondamentale du système* (1,1) *et la première paire des variables contre la seconde. En désignant donc la dernière matrice par:* $\{{}^{*}\Gamma_{\alpha\beta}(X,t;Y,\tau)\}$, $\alpha,\beta = 1,\ldots,N$, *on trouve l'égalité qui suit:*

$$(1,4)\qquad {}^{*}\Gamma_{\alpha\beta}(X,t;Y,\tau) = \Gamma_{\beta\alpha}(Y,\tau;X,t), \quad \tau > t.$$

Nous désignons par ${}^{*}P_{\alpha}(X,t;Y,\tau)$ la somme des solutions fondamentales (1,4); par ${}^{*}J_{\alpha}(X,t,\tau)$ — les intégrales généralisées de Poisson-Weierstrass correspondantes à la valeur finale $(V_1(X,\tau),\ldots,V_N(X,\tau))$ supposée bornée et continue dans $\mathcal{E}$; l'intégrale généralisée de Poisson-Weierstrass pour le système (1,1) à valeur initiale continue et bornée $\{U_{\alpha}(X,\tau)\}_{\alpha=1,\ldots,N}$ par $\{J_{\alpha}(X,t,\tau)\}_{\alpha=1,\ldots,N}$ $t > \tau$.

THÉORÈME (2,4). *Admettons les hypothèses I, II, III et V pour le système* (1,1) *du second ordre sans termes linéaires. Alors:*

1) $$\sum_{\alpha=1}^{N} {}^{*}P_{\alpha}(X,t;Y,\tau) \geqslant 0, \quad t \leqslant \tau,$$

2) *si* $V_{\alpha}(X,\tau) \geqslant 0$ $\alpha = 1,\ldots,N$, *alors:* $\sum_{\alpha=1}^{N} {}^{*}J_{\alpha}(X,t,\tau) \geqslant 0$ $t \leqslant \tau$,

3) *si* $U_{\alpha}(X,\tau) = f(X,\tau) \geqslant 0$, $\alpha = 1,\ldots,N$, *alors:* $J_{\alpha}(X,t,\tau) \geqslant 0$, $\alpha = 1,\ldots,N$, $t < \tau$,

(l'hypotèse V n'intervient pas ici).

4) *la fonction* $P_{\alpha}(Y,\tau;X,t)$ $t < \tau$ *vérifie par rapport aux variables* $(X,t) \in \mathcal{E}$ *l'équation qui est adjointe à l'équation verifiée par la même fonction mais par rapport à la paire des variables* $(Y,\tau) \in \mathcal{E}$ (voir [8], (2,4)) *seulement.*

Les théorèmes sur les signes et les valeurs extrêmales de la solution du système (1,1)

THÉORÈME (1,5). *Chaque composante de la solution de la classe* Z_1' *du système* (1,1) *du second ordre, sans termes linéaires, soumis aux hypothèses I, II et III, à valeur initiale bornée et höldérienne* $\{f(X)\}_{\alpha=1,\ldots,N}$, *vérifie tous les résultats classiques sur les signes et les valeurs extrêmales de la solution d'une équation parabolique du second ordre.*

THÉORÈME (2,5). *Les composantes d'une solution de la classe* Z_1' *du système* (1,1) *aux valeurs initiales non-négatives, ne sont pas toujours non-négatives. C'est le cas du système du second ordre sans termes linéaires, si les composantes de la fonction initiale sont différentes entre-elles.*

De même, les valeurs extrémales des composantes de la solution de ce système ne se trouvent pas toujours sur le bord du domaine, c. à. d. sur l'hyperplan $t = 0$.

THÉORÈME (3,5). *Admettons pour le système* (1,1) *les hypothèses I, II et IV, les composantes de la valeur initiale de la solution de la classe* Z_1' *étant du même signe.*

La condition nécéssaire et suffisante pour que la somme des composantes de la dite solution $\{u_\alpha(X,t)\}_{\alpha=1,\dots,N}$, *soit du même signe que les composantes de la valeur initiale consiste en ce que:*

$$\sum_{\alpha=1}^{N} \Gamma_{\alpha\beta}(X,t;Y,0) \geqslant 0, \quad t>0, \quad \beta = 1,\dots,N. \tag{4,5}$$

THÉORÈME (4,5). *Admettons les hypothèses I, II, IV et V pour le système* (1,1) *avec son adjoint termes linéaires, la valeur initiale de la solution étant intégrable dans E. Alors chaque composante de cette solution est intégrable dans E, et l'integrale de la somme des ces composantes est égale à l'intégrale de la somme des composantes de la valeur initiale. Si la valeur initiale, sans être forcément intégrable, converge uniformément avec* $|X| \to \infty$, *ainsi que les coefficients du système* (1,1) *alors la valeur limite de chaque composante de la solution correspondante est égale à la valeur limite de la composante avec le même indice. Si celle-ci n'est pas égale à zero, il exsite une telle sphère centrée à l'origine, qu'en déhors d'elle chaque composante de la solution du système conserve le signe de la limite de sa valeur initiale.* *)

La limite de la solution du système (1.1) dont les coefficients dépendent d'un paramètre $m \to \infty$, **à valeur initiale dépendante du même paramètre**

Soient:

$$\hat{\psi}_\alpha^m(u_1^m,\dots,u_N^m) = 0, \quad \alpha = 1,\dots,N \tag{1,6}$$

les systèmes paraboliques des équations dont les coefficients forment des suites soumises aux conditions suivantes:

1) les coefficients des systèmes (1, 6) sont uniformément bornés et continus par rapport à m dans $\mathcal{E}$;

2) ils sont uniformément hölderiens par rapport à m dans E et les coefficients des dégrés plus hauts des systèmes (1, 6) sont uniformément höldériens dans $\mathcal{E}$;

*) Ces deux dernières propositions n'exigent pas les hypothèses sur le système adjoint.

3) les conditions de parabolicité de Petrovsky des systèmes (1, 6) sont uniformes par rapport à m;

4) les coefficients des systemes (1, 6) convergent avec $m \to \infty$ uniformément vers les fonctions limites;

5) les valeurs initiales sont uniformément soumises à l'hypothèse IV, par rapport à $m \to \infty$, et convergent uniformément dans $\mathcal{E}$, avec $m \to \infty$. Soit

$$\bar{\psi}_\alpha(u_1, ..., u_N) \equiv 0, \quad \alpha = 1, ..., N \tag{2,6}$$

le système d'équations aux coefficients limites des coefficients des systèmes (1,6), dit système limite.

THÉORÈME (1,6). *Admettons les hypothèses 1) à 5). Les solutions de la classe Z'_1 des systèmes (1, 6) convergent, avec $m \to \infty$, vers la solution du système limite (2, 6) à valeur initiale limite des valeurs initiales des dites solutions.*

Donc, il en résulte que la matrice des solutions fondamentales, construite par W. Pogorzelski, donne une solution du problème de Cauchy correctement posé, d'après Hadamard.

INSTITUT MATHÉMATIQUE, ACADÉMIE POLONAISE DE SCIENCES
(INSTYTUT MATEMATYCZNY, PAN)

OUVRAGES CITÉS

[1] M. Picone, *Maggiorazione degli integrali delle equazioni totalmente paraboliche alle derivate parziali del secondo ordine*, Annali di Matematica Pura et Applicata, **7** (1929—1930), 145—192.

[2] W. Pogorzelski, *Étude de la matrice des solutions fondamentales du système parabolique d'équations aux derivées partielles*, Ricerche di Matematica, **7** (1958), 153—185.

[3] — , *Propriétés des solutions du système parabolique d'équations aux dérivées partielles*, Math. Scand., **6** (1958), 237—262.

[4] — , *Propriétés des intégrales généralisées de Poisson-Weierstrass*, Ann. Ec. Norm., **76** (1959), 125—149.

[5] — , *Étude de la solution fondamentale de l'équation parabolique*. Ricerche di Matematica, **5** (1956), 25—33.

[6] H. Milicer-Grużewska, *Le théorème d'unicité de solution d'un système parabolique d'équations linéaires avec les coefficients höldériens*. Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. sci. math., astr. et phys., **7** (1959), 593—599.

[7] — , *Le second théorème d'unicité de solution d'un système parabolique d'équations linéaires avec les coefficients höldériens*, ibid. 719—720.

[8] — , *Les propriétés probabilistes de la solution d'un système parabolique d'équations*, ibid. **7** (1959), 721—728.

[9] J. Petrovsky, *Über das Cauchysche Problem für ein System linearer Differentialgleichungen im Gebiete der nichtanalytischen Funktionen*, Bulletin de Moscou, **1** (1938) 65—67.

[10] S. D. Eidelman, *Sur les solutions fondamentales des systèmes paraboliques* (en russe) Math. Sbor., **38** (1958), 51—92.

[11] A. Friedman, *On the uniqueness of Cauchy problem for parabolic equations*, American Journal of Math., **81** (1959) 503—510.

BULLETIN DE L'ACADÉMIE
POLONAISE DES SCIENCES
Série des sci. math., astr.
et phys. — Vol. VIII, No. 6, 1960

MATHÉMATIQUE

Un théorème sur la dérivée spatiale de l'intégrale généralisée de Poisson-Weierstrass du système parabolique d'équations

par

H. MILICER-GRUŻEWSKA

Présenté par A. ZYGMUND le 15 avril 1960

Introduction. On sait que la dérivée spatiale de l'intégrale généralisée de Poisson-Weierstrass de l'équation parabolique [1], [2] converge vers la dérivée de sa densité normalisée, si le temps tend vers son moment initial, certaines hypothèses étant admises [6]. Un théorème analogue est valable pour la dérivée spatiale de l'intégrale généralisée de Poisson-Weierstrass du système parabolique d'équations [3] - [5]. Ce résultat est même sous certains égards plus simple, car la construction de W. Pogorzelski de la solution fondamentale du système parabolique d'équations et, en même temps de l'intégrale en question, assure la convergence de cette intégrale, avec le temps $t \to 0$, vers la densité même, certaines hypothèses étant admises [4].

La note présente démontre par suite, que *les premières dérivées spatiales de chaque composante de l'intégrale généralisée de Poisson-Weierstrass du système parabolique d'équations aux dérivées partielles et coefficients holdériens convergent vers les dérivées de la même composante de la densité de cette intégrale, pour un temps $t \to 0$, les hypothèses suivantes étant admises.* On admet notamment: 1) les hypothèses qui assurent l'existence de la solution du système [3], 2) les hypothèses sur la densité de l'intégrale qui est bornée et intégrable dans E; en plus, dérivable une fois par rapport à chaque variable $x_1, \ldots, x_n$ dans l'entourage du point $X = X(x_1, \ldots, x_n)$; ces dérivées sont continues dans ledit point X.

La démonstration facile découle des limitations des solutions fondamentales du système parabolique [4], ainsi que du théorème (3, 3) et des formules (3, 3) de la communication [7].

1. Soit l'espace euclidien des points $X = X(x_1, \ldots, x_n)$; soit le temps t — la variable non-négative et bornée $0 \leqslant t \leqslant T = \text{const}$; leurs produits cartésiens: $\mathcal{E} = E * \langle 0, T \rangle$-l'espace-temps.

Soit encore:

$$(1,1)\qquad \hat{\psi}^{(\alpha)}(u_1,\ldots,u_N)=\sum_{1\leqslant j\leqslant N}^{0\leqslant \mathcal{S}\leqslant M} A^{k_1,\ldots,k_n}_{\alpha j}(X,t)\,\frac{\partial^{\mathcal{S}} u_j}{\partial x_1^{k_1}\ldots\partial x_n^{k_n}}-\frac{\partial u_\alpha}{\partial t}=0,$$

$$0\leqslant k_l\leqslant M,\quad l=1,\ldots,n;\quad k_1+\cdots+k_n=\mathcal{S};\quad \alpha=1,\ldots,N;$$

$$X\in E;\quad 0<t\leqslant T;\quad N>1;\quad M>1,$$

le système parabolique d'équations, où $u_1(X,t),\ldots,u_N(X,t)$ sont les composantes de la solution $u=(u_1,\ldots,u_N)$, $X\in E$, $0<t\leqslant T$.

On admet, comme dans [3], les hypothèses suivantes: I. Les coefficients du système (1, 1) sont continus et bornés dans $\mathcal{E}$; ils sont holdériens par rapport à la variable spatiale $X\in E$; les coefficients des dérivées des degrés plus hauts M sont, de plus, holdériens par rapport au temps t, à savoir:

$$(2,1)\qquad |A^{k_1,\ldots,k_n}_{\alpha j}(X,t)-A^{k_1,\ldots,k_n}_{\alpha j}(Y,\tau)|\leqslant\begin{cases} c\,[|XY|^h+|t-\tau|^{h'}], & \mathcal{S}=M\\ c\,|XY|^h, & 0\leqslant\mathcal{S}<M,\quad t=\tau\end{cases}$$

$$0\leqslant k_1+\cdots+k_n=\mathcal{S}\leqslant M,\quad 0\leqslant k_l\leqslant M,\quad l=1,\ldots,n,$$

$$\alpha,j=1,\ldots,N,\quad (X,t),(Y,\tau)\in\mathcal{E}.$$

II. Le système (1, 1) est parabolique dans le sens de Petrovsky [5], (cf. [3] et [4]).

Soit la matrice des solutions fondamentales du système (1, 1)

$$\Gamma_{\alpha\beta}(X,t;Y,\tau),\qquad \alpha,\beta=1,\ldots,N;\qquad 0\leqslant\tau<t\leqslant T;\qquad (X,t),(Y,\tau)\in\mathcal{E}.$$

Chaque élément de cette matrice est d'après sa définition même une somme de l'élément de la matrice de la quasi-solution du système (1, 1), $W^{Y,\tau}_{\alpha\beta}(X,t;Y,\tau)$ et d'une reste $\overline{W}_{\alpha\beta}(X,t;Y,\tau)$. Ce reste prend la forme du potentiel spatial de simple couche, [3] et [4].

La limitation du reste $\overline{W}_{\alpha\beta}$ est, conformément à [4], la suivante

$$(3,1)\qquad |D^m_X[\overline{W}_{\alpha\beta}(X,t;Y,\tau)]|\leqslant\begin{cases}\text{const}\,(t-\tau)^{1-\mu-\mu_1}|XY|^{-[n+m-M(\mu+\mu_1-1)-h_1]}, & |XY|\leqslant\eta\\ \text{const}\,(t-\tau)^{\mu'}|XY|^{-(n+m+M\mu')}, & |XY|>\eta>0;\end{cases}$$

pour $m<M$ on a posé: $0<\mu<1$; si $n+m\geqslant M$, alors

$$mM^{-1}<\mu<(n+m)M^{-1};\quad h_1=\min(h,2h');\quad 1-h_1M^{-1}<\mu_1<1;\quad \mu'>0.$$

Nous aurons les limitations suivantes, [3] et [4], des fonctions $\Gamma_{\alpha\beta}$ et $W^{Z,\xi}_{\alpha\beta}$ pour $m=0$ et $m=1$.

$$(4,1)\quad |D^m_X\Gamma_{\alpha\beta}(X,t;Y,\tau)|\leqslant\begin{cases}\text{const}\,(t-\tau)^{\mu}|XY|^{-(n+m-M\mu)}, & |XY|\leqslant\eta,\\ \text{const}\,(t-\tau)^{\mu'}|XY|^{-(n+m+M\mu')}; & |XY|>\eta>0,\end{cases}$$

$$(5,1)\quad |D^m_X W^{Z,\xi}_{\alpha\beta}(X,t;Y,\tau)|\leqslant\begin{cases}\text{const}\,(t-\tau)^{-\mu}|XY|^{-(n+m-M\mu)}, & |XY|\leqslant\eta,\\ \text{const}\,(t-\tau)^{\mu'}|XY|^{-(n+m+M\mu')}, & |XY|>\eta>0.\end{cases}$$

Nous rappelons la définition [4] de l'intégrale généralisée de Poisson-Weierstrass, pour système parabolique, avec la densité (valeur initiale) $(\varrho_1(X), ..., \varrho_N(X))$ bornée et intégrable dans Ω:

$$(6,1) \qquad J_\alpha(X,t,\tau) = \int_\Omega \sum_{\beta=1}^{N} \Gamma_{\alpha\beta}(X,t;Y,\tau)\,\varrho_\beta(Y)\,dY, \qquad \alpha = 1, ..., N$$

(le domaine $\Omega \in E$; $t > \tau$).

L'hypothèse sur la densité $(\varrho_1(X), ..., \varrho_N(X))$ sera maintenant formulée comme suit:

III. La densité $(\varrho_1(X), ..., \varrho_N(X))$ est bornée et intégrable dans E, elle est dérivable une fois par rapport à chaque variable spatiale $x_1, ..., x_n$ dans l'entourage du point $X = X(x_1, ..., x_n) \in \Omega$ et ces dérivées sont continues dans ledit point X.

On admettra les hypothèses I, II et III dans la suite de cette communication.

2. On calcule les dérivées spatiales des intégrales J_α, $\alpha = 1, ..., N$. En posant $\overline{\Omega} = E - \Omega$ et $o(1)$, si $o(1) \to 0$, avec $t \to 0$ nous pouvons écrire:

$$(1,2) \qquad D_x J_\alpha = D_x\left[\int_\Omega \sum_{\beta=1}^{N} \Gamma_{\alpha\beta}\,\varrho_\beta\,dY\right] =$$

$$= D_x\left[\int_E \sum_{\beta=1}^{N} \Gamma_{\alpha\beta}\,\varrho_\beta\,dY\right] - D_x\left[\int_{\overline{\Omega}} \sum_{\beta=1}^{N} \Gamma_{\alpha\beta}\,\varrho_\beta\,dY\right] =$$

$$= D_x\left[\int_E \sum_{\beta=1}^{N} \Gamma_{\alpha\beta}\,\varrho_\beta\,dY\right] + o(1) =$$

$$= o(1) + \int_E \sum_{\beta=1}^{N} (D_x\,\Gamma_{\alpha\beta})\,[\varrho_\beta(Y) - \varrho_\beta(X)] + \sum_{\beta=1}^{N} \varrho_\beta(X)\,D_x\left[\int_E \Gamma_{\alpha\beta}\,dY\right], \qquad X \in \Omega.$$

Mais de la formule (3, 3) de l'ouvrage [7] nous savons que

$$(2,2) \qquad \int_E \Gamma_{\alpha\beta}\,dY = \delta_\alpha^\beta + \int_0^t \int_E \sum_{\nu=1}^{N} \Gamma_{\alpha\nu}\,A_{\nu\beta}^{0,...,0}(Y,\tau)\,dY\,d\tau, \qquad \delta_\alpha^\beta = \begin{cases} 1; & \alpha = \beta \\ 0; & \alpha \neq \beta. \end{cases}$$

On a donc d'après (2, 2) et (4, 1) pour $m = 1$:

$$(3,2) \qquad D_x\left[\int_E \Gamma_{\alpha\beta}\,dY\right] = \int_0^t \int_E \sum_{\nu=1}^{N} D_x[\Gamma_{\alpha\nu}\,A_{\nu\beta}^{0,...,0}(Y,\tau)]\,dY\,d\tau = o(1).$$

Si $K(X,\eta)$, $\eta>0$, désigne une sphère centrée dans X du rayon η, alors on peut écrire, eu égard aux formules (1, 2) et (3, 2):

$$(4,2)\qquad D_x J_\alpha = 2\,o(1) + \int_{K(X,\eta)} \sum_{\beta=1}^{N} [D_x \Gamma_{\alpha\beta}]\,[\varrho_\beta(Y) - \varrho_\beta(X)]\,dY + \int_{\overline{K}(X,\eta)} [D_x \Gamma_{\alpha\beta}]\,[\varrho_\beta(Y) - \varrho_\beta(X)]\,dY$$

où

$$\overline{K}(X,\eta) = E - K(X,\eta).$$

Du précendent et de la formule (4, 1) pour $\mu>0$, le nombre $\mu>0$ étant constant, on obtient:

$$(5,2)\qquad D_{x_l} J_\alpha = 2\,o(1) + o_\eta(1) + \int_{K(X,\eta)} \sum_{\beta=1}^{N} |D_{x_l} \Gamma_{\alpha\beta}|\,[\varrho_\beta(Y) - \varrho_\beta(X)]\,dY, \qquad l=1,\ldots,n$$

où: $o_\eta(1)\to 0$, $t\to 0$, $\eta=\text{const}$.

On peut écrire, vu la continuité des premières dérivées spatiales au point X, pour le nombre $\eta>0$ suffisamment petit:

$$D_{x_l} J_\alpha = 2\,o(1) + o_\eta(1) + \int_{K(X,\eta)} \sum_{\beta=1}^{N} |D_{x_l} \Gamma_{\alpha\beta}| \sum_{k=1}^{n} \left| \frac{\partial \varrho_\beta(X)}{\partial x_k} + o_k' \right| (y_k - x_k)\,dY, \qquad l=1,\ldots,n$$

où $o_k^\eta \to 0$, $\eta\to 0$, $k=1,\ldots,n$.

En posant $o_k^\eta = o^\eta$ on a:

$$(6,2)\qquad D_x J_\alpha = 2\,o(1) + 2\,o_\eta(1) + o^\eta \int_{K(X,\eta)} \sum_{\beta=1}^{N} |D_{x_l} \Gamma_{\alpha\beta} \cdot XY\,dY + \sum_{\beta=1}^{N} \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \varrho_\beta(X)}{\partial x_k} \int_{\overline{K}} |D_{x_l} \Gamma_{\alpha\beta}|\,(y_k - x_k)\,dY, \qquad l=1,\ldots,n.$$

On démontrera deux lemmes suivants:

LEMME (1,2). *Les hypothèses I et II étant admises, on obtient:*

$$(7.2)\qquad \int_{K(X,\eta)} |D_X \Gamma_{\alpha\beta}| \cdot |XY|\,dY \leqslant \text{const} + o_\eta(1), \qquad \eta>0.$$

LEMME (2,2). *Les hypothèses I et II étant admises, on obtient:*

$$(8,2)\qquad D_{x_l}\left[\int_{\overline{E}} \Gamma_{\alpha\beta}(y_k - x_k)\,dY\right] = o(1), \qquad l,k=1,\ldots,n.$$

La démonstration du Lemme (1,2). L'inégalité (4,1) permet écrire pour:

$$|XY|\,|D_x\,\Gamma_{\alpha\beta}| \leqslant \text{const}\, t^{-\mu}\,|XY|^{n-M\mu},\ 0<\mu<1,\ |XY|<\eta'>0;$$

$$\mu=\mu'<0,\ |XY|>\eta'.$$

Il s'ensuit alors que:

$$\int\limits_{K(X,\eta)} |D_x\,\Gamma_{\alpha\beta}|\,|XY|\,dY \leqslant \text{const}\, t^{-\mu} \int\limits_{K(X,\varrho)} \frac{dY}{|XY|^{n-M\mu}}.$$

On écrit maintenant:

$$I_1=\int\limits_{K(X,\eta)} \frac{dY}{|XY|^{n-M\mu}} = \omega_{n-1}\int\limits_0^{\eta} \frac{dr}{r^{1-M\mu}}$$

ou, si l'on pose:

$$r=ut^{1/M},\qquad dr=du\cdot t^{1/M}$$

on y trouve:

$$I_1=\omega_{n-1}\int\limits_0^{\eta\,t^{1/M}} \frac{du}{u^{1-M\mu}}\cdot t^{\mu}=\omega_{n-1}\left[\int\limits_0^1 \frac{du}{u^{1-M\mu}}\,t^{\mu}+\int\limits_1^{\eta/t^{1/M}} \frac{du}{u^{1-M\mu'}}\,t^{\mu'}\right].$$

Écrivons

$$\eta'=t^{1/M},\qquad \mu'<0,\qquad \mu>0.$$

Il en résulte que:

$$\int\limits_{K(X,\eta)} |D_x\,\Gamma_{\alpha\beta}|\,|XY|\,dY \leqslant \text{const}\left[t^{-\mu+\mu}\,\frac{1}{M\mu}\,u^{M\mu}\Big|_0^1+t^{-\mu'+\mu'}\,\frac{1}{M|\mu'|}\,u^{M\mu'}\Big|_0^{\eta\,t^{1/M}}\right]=$$

$$=O(1)+o(t^{-\mu'}\eta^{M\mu'})=o_\eta(1)+O(1).$$

Observons maintenant que:

$$(9,2)\qquad \int\limits_E [D_{x_\beta}\,\Gamma_{\alpha\beta}]\,(y_k-x_k)\,dY = D_{x_l}\int\limits_E \Gamma_{\alpha\beta}\,(y_k-x_k)\,dY -$$

$$-\int\limits_E \Gamma_{\alpha\beta}\,D_{x_\beta}(y_k-x_k)\,dY = D_{x_l}\left[\int\limits_E \Gamma_{\alpha\beta}\,(y_k-x_k)\,dY\right]+\delta_l^k\int\limits_E \Gamma_{\alpha\beta}\,dY=$$

$$=D_{x_l}\left[\int\limits_E \Gamma_{\alpha\beta}\,(y_k-x_k)\,dY\right]+\delta_l^k\,[\delta_\alpha^\beta+o(1)].$$

La formule (9, 2), le lemme (2, 2) et la formule (6, 2) achèvent la démonstration du théorème, car on peut écrire, puisque o^η est borné:

$$\left|\lim_{t\to 0} D_{x_l}[J_\alpha]-\frac{\partial\varrho_\alpha(X)}{\partial x_l}\right|\leqslant o^\eta,\qquad l=1,\ldots,n$$

mais $o^\eta\to 0$, $\eta\to 0$ donc

$$(10,2)\qquad \lim_{t\to 0} D_{x_l}J_\alpha=\frac{\partial\varrho_\alpha(X)}{\partial x_l},\qquad l=1,\ldots,n,$$

3. Démonstration du lemme (2, 2). La définion de la solution fondamentale donne

$$(1,3)\qquad D_{x_l}\left[\int_E \Gamma_{\alpha\beta}\cdot(y_k-x_k)\,dY\right]=$$

$$= D_{x_l}\left[\int_E W^{Y,o}_{\alpha\beta}\cdot(y_k-x_k)\,dY\right]+D_{x_l}\left[\int_E \bar{W}_{\alpha\beta}\cdot(y_k-x_k)\,dY\right];$$

où j_1 et j_2 désignent les composantes consécutives de la formule (1, 3).

Nous démontrerons que la composante j_2 est 0 (1).

$$(2,3)\qquad j_2=\int_E\left[(D_{x_l}\overline{W}_{\alpha\beta})(y_k-x_k)-\delta^k_l\,\overline{W}_{\alpha\beta}\right]dY=$$

$$=\int_{K(X,\eta')}\left[(D_{x_l}\overline{W}_{\alpha\beta})(y_k-x_k)-\delta^k_l\,\overline{W}_{\alpha\beta}\right]dY+$$

$$+\int_{\bar{K}(X,\eta')}\left[(D_{x_l}\overline{W}_{\alpha\beta})(y_k-x_k)-\delta^k_l\,\overline{W}_{\alpha\beta}\right]dY=i_1+i_2$$

où i_1 et i_2 sont les composantes consécutives de la somme (2. 3) et

$$\eta'=K\cdot t^{1/M},\qquad K>0.$$

Nous obtenons par conséquence:

$$(2',3)\qquad |i_2|\leqslant \text{const}\,t^{\mu'}\int_{|XY|>\eta'} dY/|XY|^{n+M\mu'}=\text{const}\,t^{\mu'}\int_{Kt^{1/M}} dr/r^{1+M\mu'}=$$

$$=\text{const}\int_K du/u^{1+M\mu'}=\text{const}/K^{M\mu'},$$

avec $r=u\,t^{1/M}$, $\mu'>0$.

Aussi on trouve:

$$(2'',3)\qquad |i_1|\leqslant \text{const}\,t^{1-(\mu+\mu_1)}\int_{|XY|\leqslant\eta'} dY\,|XY|^{n-M(\mu+\mu_1-1)-h_1}=$$

$$=\text{const}\,t^{1-(\mu+\mu_1)}\int_0^{Kt^{1/M}} dr/r^{1-M(\mu+\mu_1-1)-h_1}=\text{const}\,t^{h_1/M}\int_0^K du/u^{1-M(\mu+\mu_1-1)-h_1}.$$

Les formules (2, 3), (2′, 3) et (2″, 3) donnent:

$$\lim_{t\to 0}|j_2|\leqslant\frac{\text{const}}{K^{M\mu'}},$$

mais le nombre K est arbitraire, ce qui fait preuve que:

$$(3,3)\qquad \lim_{t\to 0} j_2=0.$$

Il suffit d'étudier la composante j_1 dans la formule (1, 3). Écrivons

$$(4,3)\qquad j_1=\left\{D_{x_l}\left[\int_E |W^{Y,o}_{\alpha\beta}(X,t;Y,o)-W^{Z,o}_{\alpha\beta}(X,t;Y,o)|\,(y_k-x_k)\,dY\right]\right\}_{Z=X}+$$

$$+\left\{D_{x_l}\left[\int_E W^{Z,o}_{\alpha\beta}(X,t;Y,o)\,(y_k-x_k)\,dY\right]\right\}_{Z=X}=i_3+i_4$$

où i_3 et i_4 désignent les composantes de la dérivée j_1. On a:

$$(5,3) \qquad i_3 = -\delta_k^l \int_E [W_{\alpha\beta}^{Y,o}(X,t;Y,o) - W_{\alpha\beta}^{X,o}(X,t;Y,o)]\, dY +$$

$$+ \int_E \{D_{x_l}[W_{\alpha\beta}^{Y,o}(X,t;Y,o) - W_{\alpha\beta}^{Z,o}(X,t;Y,o)]\}_{Z=X} \cdot (y_k - x_k)\, dY.$$

En se basant sur la formule (5, 1), en introduisant les coordonnées cylindriques et en posant ensuite $r = u\, t^{1\,M}$ il est demontré facilement que:

$$(6,3) \qquad i_3 = 0\,(t^{h\,M}).$$

Il résulte des formules (6,3), (4,3) et (3,3) qu'il suffit de calculer la dérivée i_4. Dans ce but revenons aux par. 2 et [3] et observons qu'en posant $y_k - x_k = u_k$, $dY = du_1, \ldots, du_n = dU$ *on obtient:*

$$(7,3) \qquad i_4 = (2\pi)^n \left\{ D_{x_l} \int_E \int_{-\infty}^{\infty} v_\alpha^\beta(t,o;Z,o;S)\, u_k \exp\left(i \sum_{\nu=1}^{n} \gamma_\nu u_\nu\right) dS\, dU \right\}_{Z=X},$$

$$k = 1, \ldots, n.$$

Mais l'intégrale sous le signe de la dérivée D_{x_l} ne dépend pas de x_l. Cette dérivée égale zéro et par suite on obtient:

$$(8,3) \qquad i_4 = 0.$$

Il résulte des formules (8,3), (6,3), (4,3) et (3,3) que

$$\lim_{t \to 0} D_{x_l} \left[\int_E \Gamma_{\alpha\beta}(y_k - x_k)\, dY \right] = 0$$

ce qui prouve le lemme (2,2).

Les lemmes (1,2) et (2,2) justifient la formule (10,2) et en même temps démontrent le théorème annoncé dans l'introduction.

INSTITUT MATHÉMATIQUE, ACADÉMIE POLONAISE DES SCIENCES
(INSTYTUT MATEMATYCZNY, PAN)

OUVRAGES CITÉS

[1] W. Pogorzelski, *Étude de la solution fondamentale de l'équation parabolique*, Ricerche di Matematica, **5** (1956), 25—57.

[2] — , *Propriétés des intégrales de l'équation parabolique normale*, Ann. Polon. Math., **4** (1957), 61—92.

[3] — , *Étude de la matrice des solutions fondamentales du système parabolique d'équations aux dérivées partielles*, Ricerche di Matematica, **7** (1958), 153—185.

[4] — , *Propriétés des solutions du système parabolique d'équations aux derivées partielles*, Math. Scand., **6** (1958), 237—262.

[5] J. Petrovsky, *Über das Cauchysche Problem für ein System linearer partieller Differentialgleichungen im Gebiete der nicht analytischen Funktionen*. Bulletin de l'Université de Moscou, fasc. 7, 1938.

[6] H. Milicer-Grużewska, *Un théorème limite sur la dérivée de l'intégrale de Poisson-Weierstrass généralisée*, Ann. Pol. Math., **7** (1959), 71—80.

[7] — , *Recherche sur les propriétés de la solution du système parabolique d'équations*, Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. sci. math., astr. et phys., **8** (1960), 385—390.

BULLETIN DE L'ACADÉMIE
POLONAISE DES SCIENCES
Série des sci. math., astr.
et phys. — Vol. VIII, No. 6, 1960

Equations of Potential and Temperature for Conductors in an External Magnetic Field

by

H. STACHOWIAK

Presented by W. RUBINOWICZ on April 14, 1960

Phenomenological equations of irreversible processes for a homogeneous conductor in an external magnetic field $\vec{B}$ are

$$(1) \qquad \begin{aligned} -\vec{J} &= l_1 \nabla\mu + l_{12} \nabla T + l_{13} [\nabla\mu, \vec{B}] + l_{14} [\nabla T, \vec{B}] , \\ -\vec{S} &= l_{12} \nabla\mu + l_2 \nabla T + l_{14} [\nabla\mu, \vec{B}] + l_{24} [\nabla T, \vec{B}] , \end{aligned}$$

if the approximation neglecting the effects proportional to higher powers of B is adopted (cf. [1], [2]). Here, $\vec{J}$ is the electric current density, $\vec{S}$ — the entropy current density, μ — the electrochemical potential

$$(2) \qquad \mu = \mu_e + \mu_c ,$$

where μ_e and μ_c are the electrical and the chemical potentials, respectively. l_1, l_2, l_{12}, l_{14}, l_{24} are Onsager's coefficients.

We shall obtain equations of potential and temperature, adding to Eqs. (1) conditions characterizing the steady-state processes (cf. [2]):

$$(3) \qquad \operatorname{div} \vec{J} = 0 , \qquad \operatorname{div} \vec{Q} = \operatorname{div} T\vec{S} = -\vec{J} \nabla\mu .$$

We assume that the conductor is electrically insulated.

Putting (1) into (3) we obtain

$$(4) \qquad \Delta\mu = f(T, \nabla\mu, \nabla T) , \qquad \Delta\mu = g(T, \nabla\mu, \nabla T) .$$

We see that Eqs. (4) do not contain B.

We impose the following border conditions on the solution of Eqs. (4):

$$(5) \qquad T = T(s) , \qquad J_n = 0 ,$$

on the surface of the conductor, where s indicates a point of the surface, J_n is the normal component of the current $\vec{J}$. The first condition is of the Dirichlet type, the second is a condition for the oblique derivative. The oblique direction is a function of $\vec{B}$. If the magnetic field is absent, we have a Neumann problem.

According to (3) and (5), if the current exists, it flows along closed lines and there are points where rot $\vec{J} \neq O$. On the other hand, if rot $\vec{J}$ does not vanish everywhere in the conductor, the current must be present.

In the case, when Onsager's coefficients are independent of the temperature, and if the magnetic field is homogeneous, we have

$$\text{rot}\,\vec{J} = l_{13}\,\dot{B}\Delta\mu + l_{13}\,(\vec{B}\nabla)\,\nabla\mu - l_{14}\,\vec{B}\Delta T + l_{14}\,(\vec{B}\nabla)\,\nabla T\,. \tag{6}$$

Let us consider a conductor in the form of a thin plate (situated in the plane XY), to which we apply from above and below the same field of temperature and a magnetic field perpendicular to the plate. We may assume then, that the temperature is the same throughout the plate, and, therefore, we need not solve the second Eq. (4). The first Eq. (4) is now two-dimensional. If the magnetic field is homogeneous and the Onsager coefficients are independent of the temperature, this equation has the form

$$\frac{\partial^2 \mu}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mu}{\partial y^2} = -\frac{l_{12}}{l_1}\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right); \tag{7}$$

rot $\vec{J}$ has only the z-component:

$$\text{rot}_z\,\dot{J} = -\frac{l_{12}\,l_{13} - l_1\,l_{14}}{l_1}\,B\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right). \tag{8}$$

In view of the fact that div $\dot{J}$ is zero, $\dot{J}$ may be represented by the curl of a certain vector. Since the problem is two-dimensional, this vector has only the z-component (which we shall name A) different than zero. Therefore,

$$J_x = \frac{\partial A}{\partial y}, \qquad J_y = -\frac{\partial A}{\partial x}. \tag{9}$$

Putting (9) into (8) we obtain

$$\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} = \frac{l_{12}\,l_{13} - l_1\,l_{14}}{l_1}\,B\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right). \tag{10}$$

The second condition (5) gives

$$A = 0 \tag{11}$$

along the border line of the plate.

We have a simple Dirichlet problem, which is particularly easy to solve for a rectangular plate. If we assume in this case, that the temperature depends only on x, we get

$$(12)\qquad A(x,y) = -\frac{l_{12}l_{13} - l_1 l_{14}}{l_1} B \sum_{m=0}^{\infty} \frac{4a}{\pi^2 (2m+1)^2} \times$$

$$\times \frac{\sin \frac{\pi(2m+1)}{a} y}{\operatorname{sh} \frac{\pi}{a}(2m+1)\,2l} \left[\operatorname{sh} \frac{\pi(2m+1)}{a}(l-x) \times \right.$$

$$\times \int_{-l}^{x} \frac{d^2 T}{dx_0^2} \operatorname{sh} \frac{\pi(2m+1)}{a}(l+x_0)\,dx_0 + \operatorname{sh} \frac{\pi(2m+1)}{a}(l+x) \times$$

$$\left. \times \int_{-l}^{x} \frac{d^2 T}{dx_0^2} \operatorname{sh} \frac{\pi(2m+1)}{a}(l-x_0)\,dx_0 \right],$$

where a is the width of the plate and $2l$ its length.

The existence of an electric current in our case gives a correction to the Nernst effect: e.g. the potential difference between the corners of the plate

$$(13)\qquad V = \mu(l,a) - \mu(l,0) = \int_0^a \left(\frac{\partial \mu}{\partial y}\right)_{x=l} dy$$

is

$$(14)\qquad V = -\frac{l_{12}l_{13} - l_1 l_{14}}{l_1^2} \left(\frac{dT}{dx}\right)_{x=-l} a + \frac{1}{l_1} \int_0^a \left(\frac{\partial A}{\partial x}\right)_{x=l} dy.$$

If

$$(15)\qquad T = T_0 - c|x|,$$

we have

$$(16)\qquad V = \frac{l_{12}l_{13} - l_1 l_{14}}{l_1^2}\, caB \left[1 - 8 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{\pi^2 (2m+1)^2} \frac{1}{\operatorname{ch} \frac{\pi(2m+1)}{a} l} \right],$$

The second term in the bracket is correction to the Nernst effect caused by the electric current.

LOW TEMPERATURE LABORATORY (WROCŁAW), INSTITUTE OF PHYSICS, POLISH ACADEMY OF SCIENCES.
(ZAKŁAD NISKICH TEMPERATUR, WROCŁAW, INSTYTUT FIZYKI, PAN)

REFERENCES

[1] L. D. Landau, E. M. Lifshitz, *Electrodynamics of continuous media*, (in Russian), Moscow, 1957, pp. 130—146.

[2] H. B. Callen, Phys. Rev., **73** (1948), 1349.

BULLETIN DE L'ACADÉMIE
POLONAISE DES SCIENCES
Série des sci. math., astr.
et phys. — Vol. VIII, No. 6, 1960

EXPERIMENTAL PHYSICS

Fluorescence Yield of Eosin Solutions in Collodion and in Glucose

by

R. DRABENT

Presented by A. JABŁOŃSKI on April 1, 1960

Various experimental papers [1] - [3], [10], [14], [15], [18], [19] on the energy yield of the fluorescence of organic dye solutions indicate that, for long-wave excitation, the yield decreases towards longer wavelengths of the exciting light. The shape of this decrease depends on a number of external factors, such as temperature [17], the method used in preparing the solution [8], [9], and the kind of solvent used [4], [5].

Numerous difficulties, connected primarily with the lack of suitable data, stand in the way of a satisfactory explanation of this problem.

A considerable amount of theoretical work has been carried out with the aim of explaining the decrease in yield observed. However, the results proved so far unsatisfactory having failed to give a full account of the phenomenon [1], [2], [14], [20], [21].

Special attention should be paid to the hypothesis of T. Förster [6] and A. Jabłoński [11] - [13], according to which the decrease in yield observed is due to non-active absorption bands [16]. Absorption of this kind can result from dimers (or associates) of dye molecules as the latter, when in solution, are known to associate with one another forming dimers or clusters of a greater number of molecules at higher concentrations of the solution. The absorption bands of the resulting dimers are usually inactive.

Investigation by T. Förster [7] proved that eosin, rhodamin and fluoresceine associate in solution readily forming dimers, and that the monomers and dimers present distinct, characteristic absorption spectra.

In an earlier paper [5], the yield and absorption spectrum of rhodamin were found to be strongly affected by the solvent.

The present investigation deals with the energy yield of the luminescence of eosin in the following two solvents: collodion and glucose. In order to verify whether eosin solutions in either solvent present dimers, the author investigated additionnally the absorption spectra of these luminophors.

Rigid solutions of eosin in collodion and in glucose were used. These were prepared by a method similar to the one used for rhodamin [5]. The dye concentration amounted to about 10^{-3} g/g of eosin in collodion, and 10^{-4} g/g of eosin in glucose. Light of wavelengths corresponding to the long-wave end of the absorption spectrum was used for excitation.

The relative energy yield of luminescence was measured by A. Jabłoński's method [12], [5] (preliminary investigation having shown that the emission spectra of the luminophors used are independent of the exciting wavelength throughout the range of wavelengths applied). The absorption bands in the visible range were investigated with a Zeiss Q24 spectrograph.

Experimental results

Curve I in Fig 1 shows the relative energy yield of luminescence *versus* the exciting wavelength, for eosin in collodion. Curve I in Fig. 2 presents the photometrized absorption spectrum of the luminophor.

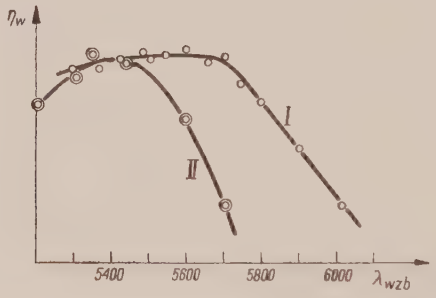

Fig. 1. Relative energy yield of fluorescence *versus* the exciting light wavelength: Curve I — Eosin in collodion, curve II — Eosin in glucose

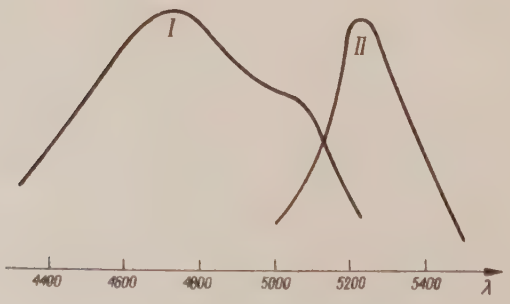

Fig. 2. Absorption spectra of eosin: Curve I — Eosin in collodion, curve II — Eosin in glucose

From these curves, the yield is seen to remain practically constant throughout the exciting wavelength range of $5450 < \lambda_{exc.} < 5700$ Å, and to decrease thereafter. The range of exiting wavelengths applied here corresponds to the long-wave end of the absorption spectrum (Fig. 2, curve I); however, taking into account the position of the emission spectrum maximum (Table), this will be seen to belong still to the domain of Stokes excitation. The absorption spectrum of eosin in collodion presents two maxima (Fig. 2, curve I, Table). On comparing their positions in wavelength scale with the respective results for eosin in 0.1N NaOH, the long-wave maximum will be found to belong ($\lambda_{max} = 5080$ Å) to eosin monomers. The intensity distribution in the absorption spectrum of rhodamin in the same solvent [5] seems to indicate that the short-wave maximum is related to dimers formed of eosin molecules or to associates of eosin molecules with those of collodion. Further investigations will be required to explain fully the existence of this maximum.

Curve II in Fig. 1 presents the dependence of the relative energy luminescence yield on the exciting wavelength for eosin in glucose solution. From Fig. 1 (curves I, II) eosin is seen to exhibit in glucose a much higher decrease in yield that eosin in collodion; the decrease, for the collodion solution, presents a greater displacement towards longer wavelengths with respect to the absorption band that is the case for eosin in glucose (Fig. 2).

The absorption spectrum of eosin in glucose presents a single maximum at 5250 Å (Fig. 2, curve II). However, the formation of various associates cannot be ruled out. Maybe, their absorption band is near that of the monomers, resulting in superposition and, hence, an absorption band of one maximum [14].

TABLE

Solvent					
Aqueous NaOH solution*)		Collodion		Glucose	
Absorption maximum of monomers	Absorption maximum of dimers	Absorption maximum	Emission maximum	Absorption maximum	Emission maximum
5170	4950 5220	4750 5080	600	5250	5630 5900

The foregoing results point to a strong dependence on the solvent of both the shape of the luminescence yield depending on the exciting wavelength and that of the decrease in yield for each of the dyes. The reason for this may be sought in the processes of association.

*) T. Förster [7].

Investigation is in progress with the aim of determining, to what extent processes of dimerisation or association of the dye molecules are responsible for the decrease in yield observed.

The author wishes to thank Professor A. Jabłoński, Director of the Group of Physical Departments of M. Kopernik University in Toruń, for his valuable remarks and help throughout the present investigation.

DEPARTMENT OF PHYSICS, COLLEGE OF AGRICULTURE, OLSZTYN.
(KATEDRA FIZYKI, WYŻSZA SZKOŁA ROLNICZA, OLSZTYN).

REFERENCES

[1] G. I. Adirovitch, *Chosen problems of the theory of luminsecence in crystals,* Moscow, 1951 (in Russian).
[2] — , Trudy F. I. A. N. SSSR, **5** (1949), 387 (in Russian).
[3] M. N. Alentsev, DAN SSSR, **64** (1941), (in Russian).
[4] R. Drabent and D. Frąckowiak, Acta Phys. Polon., **14** (1955), 447.
[5] R. Drabent, Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. III, **6** (1957), 1131.
[6] T. Förster, *Fluoreszenz organischer Verbindungen*, Göttingen, 1951.
[7] T. Förster, and E. König, Zs. f. Elektrochemie, **61** (1957), 344.
[8] D. Frąckowiak, Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. III, **6** (1957) 991.
[9] D. Frąckowiak, L. Korbutt, T. Korbutt, Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. sci. math., astr. phys., **6** (1958), 781.
[10] A. Jabłoński, Acta Phys. Polon., **2** (1933), 97.
[11] — , Zs. f. Phys., **73** (1931), 460.
[12] — , *O wpływie oddziaływań międzycząstkowych na zjawiska absorpcji i emisji światła,* Warszawa, 1934.
[13] — , Acta Phys. Polon., **13** (1954), 239.
[14] P. Pringsheim, *Fluorescence and Phosphorescence*, New York, 1949.
[15] S. S. Solomin, DAN SSSR, **31** (1941), 741.
[16] B. I. Stepanov, *The luminescence of compound molecules*, Minsk, 1955, (in Russian).
[17] L. A. Tumerman, Trudy F. I. A. N. SSSR, **4** (1938), (in Russian).
[18] S. I. Vavilov, Zs. f. Phys., **22** (1924), 266.
[19] — , Zs. f. Phys., **42** (1927), 311.
[20] — , IAN SSSR, **9** (1945), 279.
[21] — , *Collected Papers*, Vol. II 373 Moscow, 1152 (in Russian).

BULLETIN DE L'ACADEMIE
POLONAISE DES SCIENCES
Série des sci. math., astr.
et phys. — Vol. VIII, No. 6, 1960

γ-Spectra of ^{165}Tu and ^{167}Tu

by

S. CHOJNACKI, A. JASIŃSKI, W. KUSCH, J. KOWNACKI,
H. LANCMAN and J. A. YUTLANDOV

Presented by H. NIEWODNICZAŃSKI on April 21, 1960

The γ-spectra of two neutron-deficient isotopes ^{165}Tu and ^{167}Tu were investigated.

The measurements were performed with a scintillation spectrometer, a 100-channel pulse analyser and an amplifier with pulse formed by shortened delay line. A cylindrical 25×25 mm NaI (Tl) crystal with a $\Phi\epsilon$ Y — C photomultiplier was used. The relative half-width of the 661 keV ^{137}Cs line in zero geometry (source placed on the crystal) was 7.8%. Special care was taken not to overload the amplifier.

Neutron-deficient isotopes of thulium were obtained as spallation fragments by irradiating a tantalum target with 660 MeV protons in the synchrocyclotron of the United Nuclear Research Institute in Dubna. Thulium was separated from the products of the reaction by chromatographic method.

^{165}Tu

The γ-spectrum of this isotope has been investigated several times [1] - [3], [9].

In our measurements the following γ-transitions were observed: 243, 292, 354, 453, 810, 1172 ± 12, 1398 ± 12, 2007 ± 25 keV. Since the soft part of the γ-spectrum was already sufficiently well known, we were particularly interested in the high energy region (Fig. 1).

A 10 mm thick Pb filter covered with 0.5 mm Cd and 0.2 mm Cu foils on the side of the crystal was used in order to reduce the high intensity in the soft part of the spectrum. To verify, whether the line 2007 keV is not a result of a superposition of pulses (810 + 1170 keV), additional measurements were performed at various geometries. They showed the same drop of intensity for all lines, when the distance between the source and the crystal was increased (Fig. 2). This confirms the existence of the 2007 keV transition. The relative intensities of the lines in the investigated

part of the spectrum were estimated by comparison with the known spectrum of ^{76}As. In this way we obtained (1172): (1398) : (2007) = = 1 : 0.23 : 0.06.

^{167}Tu

The purpose of investigating the ^{167}Tu γ-spectrum was to eliminate the uncertainty as to the existence of the 515 and 720 keV transitions [5], [3], [9] and to search for γ-transition observed in the decay of ^{167}Ho [4] (Fig. 3). The measurements were carried out 20 days after irradiation of the tantalum target. Thus, the radiation of short lived isotopes of thulium was eliminated.

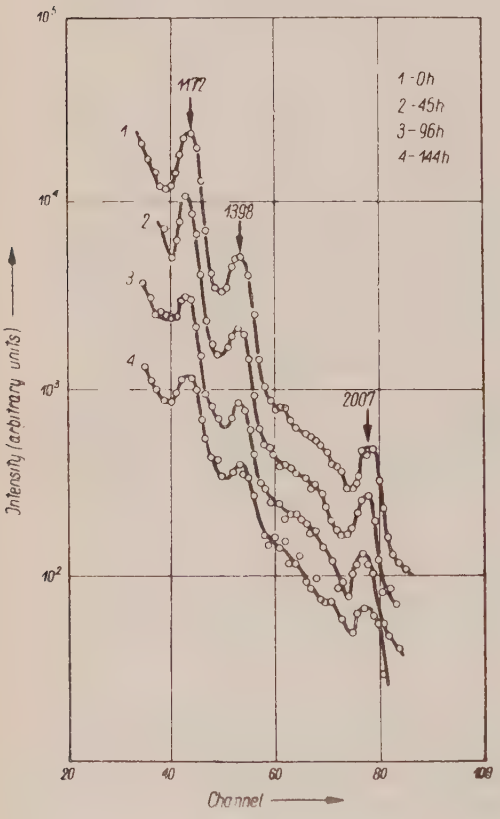

Fig. 1. The ^{165}Tu γ-spectra obtained in measurements performed 45, 96 and 144 hours after the first measurements

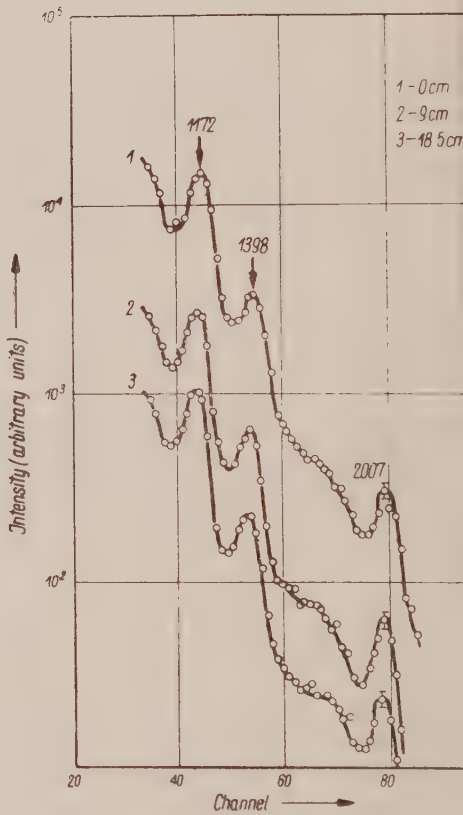

Fig. 2. Gama-ray spectra of ^{16} obtained in measurements at var source-crystal distances

Fig. 4 shows the γ-spectrum of ^{167}Tu on the background of the 85-day ^{168}Tu radiation period (lines 444, 730 and 825 keV). The spectrum consists of two lines, a strong one with energy 208 keV and a weak one 527 $\pm$ 10 keV. The estimated relative intensities are: (527) : (208) = 0.059 $\pm$

± 0.005. The 350 and 720 keV transitions have not been found. They must be very weak, if existing at all. The measurement of the 720 keV line is difficult because a line of similar energy exists in the ^{168}Tu spectrum. The 120 keV transition previously observed [5] has been put in doubt [3]; the measurements carried out with a 10 mm thick Pb collimator with a cone-shaped hole, show that this line is spurious (Fig. 5) *). The value of the *K*-shell internal conversion coefficient for the 527 keV transition is $a_k = (1.02 \pm 0.40) \cdot 10^{-2}$. This is estimated on the basis of our results and those obtained in [6] and [7] — and is in agreement with the interpretation given by Mottelson and Nilson [10]. This transition is of

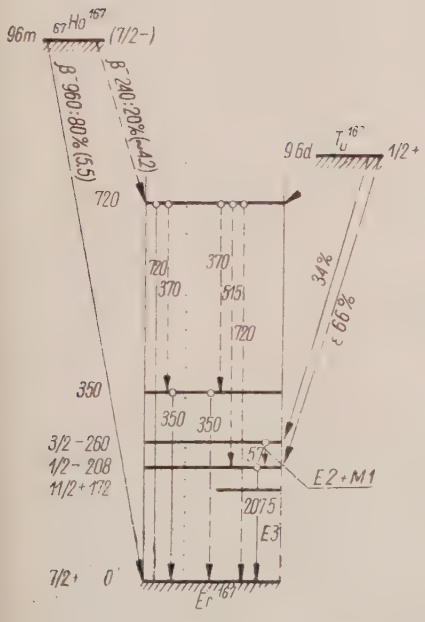

Fig. 3. Decay scheme of ^{167}Tu

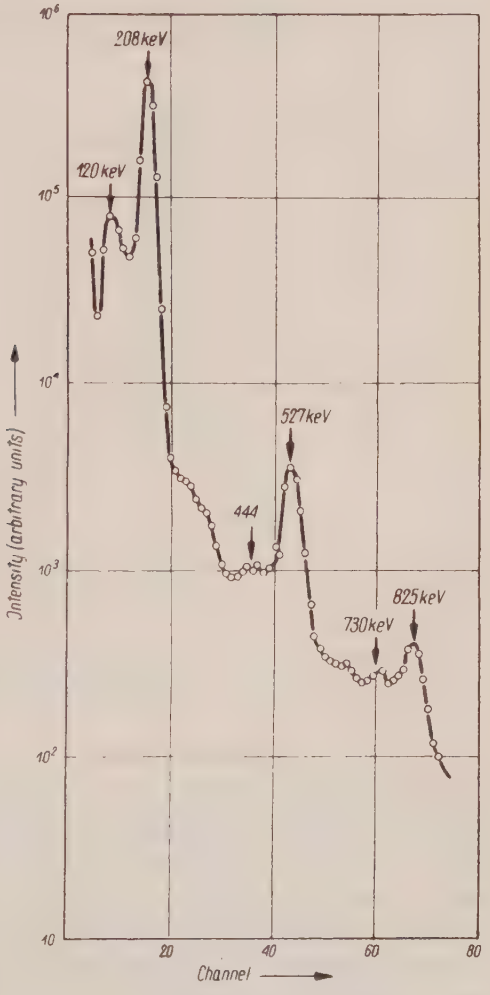

Fig. 4. Gamma-ray spectrum of $^{167}Tu + ^{168}Tu$

*) If this transition exists then the its intensity is several times lower than given by Nervik and Seaborg [5].

the E2 type [8] (with a possible small admixture of M1). According to this, the 735 keV level of ^{167}Er has a spin 5/2 eventually 3/2 and odd parity, if the line 527 keV is supposed to be a result of transition from the level 253 keV to the 208 keV level. In the first case (spin 5/2), the K-capture from the ground state of ^{167}Tu classified as possessing spin 1/2 and even parity, would be the transition of the 1 * h type [10]. It must be mentioned that in the light of data known at present the location of the 527 keV transition seems to be doubtful [9].

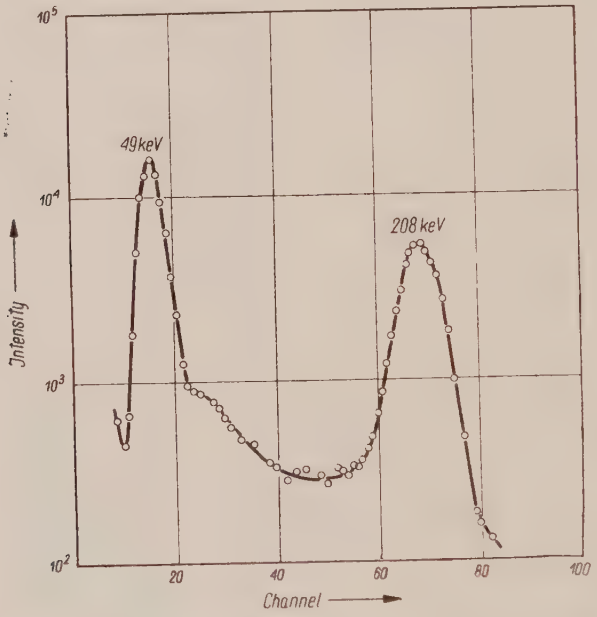

Fig. 5. The gamma-ray spectrum of ^{167}Tu obtained by using a Pb collimator with a cone-shaped hole

The γ spectra of ^{165}Tu were investigated with a scintillation spectrometer. In ^{165}Tu the γ-transitions 243, 292, 354, 453, 810, 1172 and 1398 keV were confirmed. A 2007 keV transition was found and the relative intensities of the last three γ-transitions estimated (1172) : (1398) : (2007) = = 1 : 0.23 : 0.06. In ^{167}Tu 208 keV and 527 keV transitions were observed and their relative intensities measured: (527) : (208) = 0.059 ± 0.005. The results obtained are in agreement with spin 5/2 and odd parity of the 735 keV level in ^{167}Er.

INSTITUTE FOR NUCLEAR RESEARCH, POLISH ACADEMY OF SCIENCES.
(INSTYTUT BADAŃ JĄDROWYCH, PAN).
UNITED NUCLEAR RESEARCH INSTITUTE, DUBNA, USSR.

REFERENCES

[1] K. Gromov, B. Dzhelepov, B. Preobazhenski, Izw. A.N. SSSR, sér. phys., **21** (1957), 918.

[2] T. Handley, E. Olson, Phys. Rev., **92** (1953), 1260.

[3] G. Gorodinski, A. Murin, B. Pokrowski, B. Preobrazhenski, Izw. A.N. SSSR, sér. phys., **21** (1957), 1004.

[4] B. S. Dzhelepov, A. K. Peker, *Schemas of decay of radioactive nuclei* (in Russian), Moscow-Leningrad, 1958.

[5] W. Nervik, G. Seaborg, Phys. Rev., **94** (1955), 968.

[6] S. Chojnacki, H. Lancmann, R. Sosnowski, O. Wołczek, I. A. Yutlandov, J. Żylicz, Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. sci. math., astr. et phys. **7** (1959), 535.

[7] E. Campbell, I. Kahn, M. Goodrich, Nu. Sci., **10** (1956), 256.

[8] M. E. Rose, *Internal conversion coefficients*, North Holland Publ. Comp., Amsterdam, 1958.

[9] B. Harmatz, T. H. Handley, J. W. Mihelich, Phys. Rev., **114** (1959), 1082.

[10] B. R. Mottelson, S. V. Nilsson, Mat. fys. Skr. Dan. Vid. Selsk, **8** (1959).

БЮЛЛЕТЕНЬ
ПОЛЬСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

СЕРИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ, АСТРОНОМИЧЕСКИХ
И ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

1960

ТОМ VIII Резюме статей ВЫПУСК 6

ВАНГ-ШЕНГ-ВАНГ. **ЗАМЕТКА О РЕШЕНИЯХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ГАММЕРШТЕЙНА** . . . . . стр. 339—342

В работе приняты следующие предположения:

Пусть G — L-мерное множество в евклидовом пространстве конечной размерности; $K(s, t)$, определенное на $s, t \in G$, — квазиотрицательный симметрический корень, определенный в свою очередь вполне непрерывным оператором в L^2; функция $f(t, u)$, определенная на $t \in G$, $-\infty < u < \infty$, удовлетворяет следующим условиям: для каждого u функция $f(t, u)$ измерима по отношению к t, а для почти каждого t она непрерывна по отношению к u.

В работе доказываются следующие теоремы:

Теорема 1. *Если* $K(s, t)$, $f(t, u)$ *удовлетворяют приведенным выше условиям и если*

$$\int_0^u f(t, u)\, du \geqslant au^2 + b(t)\,|u|^{2-\sigma} + c(t),$$

где $a > \lambda$ (λ — *максимальная положительная характеристика* K), $b(t) \in L^{a/\sigma}$, $0 < \sigma < a$, $c(t) \in L$, *то уравнение*

$$\varphi(s) = \int_G K(s, t)\, f(t, \varphi(t))\, dt \tag{1}$$

имеет одно, по крайней мере, решение в L^2.

Теорема 2. *Если* K, *определенное при помощи* $K(s, t)$ *является линейным симметрическим оператором (не-обязательно вполне непрерывным), то* (λ_1, λ_2) *является интервалом* G, *причем* $\lambda_1, \lambda_2 \in G$, *а нуль не содержится в* (λ_1, λ_2).

Если существуют μ_1, μ_2 *такие, что* $\lambda_1 < \mu_1 < \mu_2 < \lambda_2$ *и если*

$$\frac{1}{\mu_2} \leqslant \frac{f(t, u) - f(t, u_2)}{u_1 - u_2} \leqslant \frac{1}{\mu_2} \quad (-\infty < \mu_1, \mu_2 < \infty),$$

то для уравнения (1) *имеется одно и только одно решение в* L^2.

Это решение, приведенное в доказательстве, получается путем особого итерационного процесса.

Я. ВОЛЬСКАЯ-БОХЕНЭК, **НЕЛИНЕЙНАЯ ЗАДАЧА С КОСОЙ ПРОИЗВОДНОЙ** . . . . . стр. 343—347

Задача касается нахождения функции $u(x, y)$, которая внутри области S, ограниченной замкнутой кривой Γ, выполняет почти всюду эллиптическое уравнение

$$\Delta u + a(x, y)\, u_x + b(x, y)\, u_y + c(x, y)\, u = f(x, y), \tag{1}$$

а в каждой точке $\pi \in \Gamma$ выполняет краевое условие:

$$\alpha_1 u_x - \beta_1 u_y + \gamma u = \varphi(\pi, u, \alpha_2 u_x - \beta_2 u_y), \tag{2}$$

где заданные функции $a(x, y)$, $b(x, y)$, $c(x, y)$, $f(x, y)$ принадлежат к классу $L_p(C + \Gamma)$ заданные функции, $\alpha_i(\pi), \beta_i(\pi), \gamma(\pi), (i = 1, 2)$ принадлежат к классу C_0, заданная функция $\varphi(\pi, u, u_1)$ принадлежат к классу C_0 по отношению к переменным π, u и к классу C_1 по отношению к переменной u_1, кроме того $\Gamma \in C_u^1$.

Вышеупомянутая задача в линейном случае была решена И. Н. Векуа. Опираясь на метод И. Н. Векуа, задача (1), (2) была сведена к решению системы четырех уравнений с четырьмя неизвестными функциями. Применяя теорему об инвариантной точке И. Шаудера, доказано существование, по крайней мере, одной функции u, выполняющей уравнение (1) и краевое условие (2) в случае, когда индекс задачи не меньше нуля. Найденное решение принадлежит к классу C^1 и $D_{2,p}$, а следовательно существует в обобщенном смысле.

В. МАТУШЕВСКАЯ, **ОБ ОБОБЩЕННЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ОРЛИЧА** стр. 349—353

φ-функцией называем действительную, непрерывную и неубывающую функцию для $u \geqslant 0$, равную нулю лишь в случае $u = 0$, стремящуюся к бесконечности при $u \to \infty$.

Измеримую в $< a, b >$ функцию x называем φ-интегрируемой в $< a, b >$, если интеграл $\int_a^b \varphi(|x(t)|)\, dt$ конечный.

Через $L^* \varphi < a, b >$ обозначаем пространство функций x, обладающих таким свойством, что при некотором $\lambda > 0$, функция λx является φ-интегрируемой.

В работе приводятся исследования различных свойств $L^* \varphi < a, b >$, а особенно возможности введения s-однородной нормы.

М. ФИШ, **ЗАМЕЧАНИЯ О РЕАЛИЗАЦИЯХ НЕКОТОРЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ** . . . . . стр. 355—358

Рассматривается стохастический, действительный, сепарабельный процесс $\{x_t, t_0 Y_0\}$, где Y_0 является конечным замкнутым интервалом. Формулы (1) — (5) определяют для интервалов $Y < Y_0$ функции $a(Y)$, $b(Y, \varepsilon)$, $A(Y)$, $B(Y, \varepsilon)$ и $Q(t)$.

Исследуются свойства реализаций процесса $\{x_t, t \in Y_0\}$ при различных предположениях относительно вышеупомянутых функций.

В. ПОГОЖЕЛЬСКИЙ, **О ГЛАВНОМ СВОЙСТВЕ ОДНОГО КЛАССА $\mathfrak{H}$ РАЗРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ ДЛЯ СИСТЕМЫ ДУГ** . . . . . стр. 359—364

Пусть будет на плоскости комплексной переменной произвольная конечная система гладких дуг $l_1, l_2, \ldots, l_m$, не имеющих общих внутренних точек, но концы которых $c_1, c_2, \ldots, c_p$ могут быть общие. Автор называет классом $\mathfrak{H}_\alpha^h$ множество всех комплексных функций $\varphi(\zeta)$, определенных на множестве точек $L = l_1 + l_2 + \ldots + l_m$ (без концов c_ν), которые удовлетворяют неравенству (1) и обобщенному условию Гельдера (1′).

Автор доказывает, что если функция $\varphi(\zeta)$ принадлежит к классу $\mathfrak{H}_\alpha^h$, то преобразованная при помощи сингулярного интеграла (2) функция $\psi(\zeta)$ принадлежит к тому же классу $\mathfrak{H}_\alpha^h$, удовлетворяя неравенствам (3) и (4).

В. ПОГОЖЕЛЬСКИЙ, **ОБОБЩЕННАЯ ЗАДАЧА С КАСАТЕЛЬНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ** . . . . . стр. 365—371

Пусть будет параболическое уравнение вида (1), в котором коэффициенты выполняют условие Гельдера, и заданная функция F, удовлетворяющая условиям (3) и (4). Проблема состоит в определении функции $u(X, t)$, которая 1) удовлетворяет уравнению (1) в каждой точке $[X \in \Omega, \ 0 < t < T]$, 2) выполняет краевое условие (9) в каждой точке $P \in S$, для $0 < t < T$ и 3) при начальном условии (12).

Для решения задачи автор доказывает две фундаментальные теории, касающиеся свойств (16) и (18), которыми обладают граничные значения касательных производных потенциала простого слоя (14) с плотностью φ, выполняющей неравенство (13). Автор ищет решения задачи в виде суммы интегралов (19) и сводит задачу к решению системы сингулярных интегральных уравнений (21).

Автор доказывает существование решения, при помощи топологической теоремы Шаудера о неподвижной точке.

В. ЖЕЛЯЗКО, **ТЕОРЕМА О ТЕЛАХ ТИПА B_0** . . . . . стр. 373—375

В работе доказывается, что каждое тело типа B_0 выполняет теорему Мазура, т. е. что оно изоморфно и гомеоморфно либо с телом действительных чисел, либо с телом комплексных чисел, либо с телом кватернионов. Это доказательство получаем, обобщая теорему Монтгомери [3] на произвольные абалевы группы (Теорема 2) и применяя ее к теореме Аренса [1], (Теорема 1).

Я. ЗАМОРСКИЙ, **ОБ ОДНОМ КЛАССЕ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ** стр. 377—380

Для класса аналитических функций, определенных в кольце $0 < |z| < 1$, обладающих разложением

$$f(z) = z^{\alpha+\beta}(1 + a, z + \ldots)$$

и удовлетворяющих уравнению

$$\frac{z f'(z)}{f(z)} = \alpha p(z) + \beta, \qquad re\, p(z) > 0$$

дается форма экстремальной функции для каждого конечного функционала. Далее, даются алгебраическое и дифференциальное уравнения, определяющие экстремальную функцию для такого именно функционала, а также точные оценки коэффициентов функции этого класса в зависимости от параметров α и β.

К. МОРЭН, **ЗАМЕТКА ОБ ОВЩЕЙ ТЕОРЕМЕ О РАЗЛОЖЕНИЯХ ПО СОБСТВЕННЫМ ФУНКЦИЯМ ПЕРЕСТАНОВОЧНЫХ СИСТЕМ ОПЕРАТОРОВ ПРОИЗВОЛЬНОЙ МОЩНОСТИ** . . . . . стр. 381—384

Настоящая заметка является продолжением работы автора [2]. Приводится пригодная для применений формулировка общей теоремы о разложениях по собственным функциям перестановочной системы $\mathcal{A}$ произвольной мощности самосопряженных операторов в сепарабельном гильбертовом пространстве H (Теорема 1).

В Теореме 2 доказывается, что предположения Теоремы 1 выполняются всегда, когда области операторов, принадлежащих к $\mathcal{A}$ обладают плотным пересечением в пространстве H.

Г. МИЛИЦЕР-ГРУЖЕВСКАЯ, **ИССЛЕДОВАНИЯ СВОЙСТВ РЕШЕНИЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ** . . . . . стр. 385—390

В работе приводятся некоторые свойства решения параболической системы уравнений с частными производными и коэффицентами Гельдера. Полученные результаты выведены: 1) из определения и свойств матрицы основных решений В. Погожельского [2] — [5] параболической системы уравнений; 2) из теорем об однозначности решений систем [6] и [7], а также их пробабилистических свойств [8]. Это дает возможность решения вопроса — можно-ли обобщить на параболическую систему результаты, полученные М. Пиконе [1], касающиеся знаков и экстремов решения параболического уравнения.

Для системы 2-го порядка без линейных выражений и с одинаковыми компонентами первоначальных значений решений — ответ на вопрос является положительным. Для случая же неодинаковых компонент приводится контр-пример.

Г. МИЛИЦЕР-ГРУЖЕВСКАЯ, **ТЕОРЕМА О ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ПРОИЗВОДНОЙ ОБОБЩЕННОГО ИНТЕГРАЛА ПУАССОНА-ВЕЙЕРШТРАССА ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ** . . . . . стр. 391—397

В работе доказывается, что первые пространственные производные каждой компоненты обобщенного интеграла Пуассона-Вейерштрасса системы параболических уравнений с частными производными и с коэффициентами Гельдера, стремятся к производным соответственных компонент плотности этого интеграла в случае когда $t \to 0$. Принимаются: 1) предположения, которые обеспечивают существование решений системы [3]; 2) предположения, касающиеся плотности — она является ограниченной и интегрируема в E, а также дифференцируема однократно по каждой из переменных $x_1, ..., x_n$ в соседстве точки $X = X(x_1, ..., x_n)$. Эти производные непрерывны в данной точке X.

Г. СТАХОВЯК, **УРАВНЕНИЯ ПОТЕНЦИАЛА И ТЕМПЕРАТУРЫ ДЛЯ ПРОВОДНИКОВ ВО ВНЕШНЕМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ** . . . . стр. 399—401

На феноменологические уравнения термодинамики необратимых процессов, относящиеся к проводникам в магнитном поле, налагаются условия стационарности. Это приводит к системе уравнений температуры и электрохимического потенциала. Решение этих уравнений дает все сведения о термодинамическом состоянии проводника. Разработаны методы нахождения этих решений в простейших случаях. Рассчеты произведены в приближении, учитывающем только члены линейные в B.

Р. ДРАБЕНТ, **ВЫХОД ФЛУОРЕСЦЕНЦИИ РАСТВОРОВ ЭОЗИНА В КОЛЛОДИИ И ГЛЮКОЗЕ** . . . . . стр. 403—406

Исследована зависимость энергетического выхода флуоресценции растворов эозина в коллодии и глюкозе от длины воздуждающей волны.

Констатировано, что как пробег энергетического выхода, так и характер падения выхода в пределе длинных волн зависит от рода растворителя.

С. ХОЙНАЦКИЙ, А. ЯСИНСКИЙ, В. КУШ, И. КОВНАЦКИЙ, Г. ЛАНЦМАН и И. А. ЮТЛАНДОВ, **γ-СПЕКТРЫ Tu^{165} И Tu^{167}** . . . . . стр. 407—411

При помощи сцинтилляционного спектрометра были исследованы γ-спектры Tu^{165} и Tu^{167}.

Подтверждено существование γ-переходов 243, 292, 354, 453, 810, 1172 и 1398 *кэв*. Найден переход 2007 *кэв*. Дается также оценка относительных интенсивностей трех последних γ-переходов: (1172) : (1398) : : (2007) = 1 : 0,23 : 0,06.

В Tu^{167} наблюдались γ-переходы 208 *кэв* и 527 *кэв*, а также были измерены их относительные интенсивности: (527) : (208) = 0,059 ± ± 0,005.

Полученные результаты согласуются со спином 5/2 и с отрицательной четностью уровня 735 *кэв* в Er^{167}.

TABLE DES MATIÈRES

Mathématique

1. Wang Sheng-Wang, On the Solution of the Hammerstein Integral Equations 339
2. J. Wolska-Bochenek, Problème non-linéaire à la dérivée oblique 343
3. W. Matuszewska, On Generalized Orlicz Spaces 349
4. M. Fisz, Remarks on the Sample Functions of Some Stochastic Processes 355
5. W. Pogorzelski, Sur une propriété principale d'une classe $\mathfrak{H}$ de fonctions discontinues pour le système d'arcs 359
6. W. Pogorzelski, Problème généralisé aux derivées tangentielles pour l'équation parabolique 365
7. W. Żelazko, A Theorem on B_0 Division Algebras 373
8. J. Zamorski, Remarks on a Class of Analytic Functions 377
9. K. Maurin, Eine Bemerkung zur allgemeinen Eigenfunktionsentwicklungen für vertauschbare Operatorensysteme beliebiger Mächtigkeit. . . 381
10. H. Milicer-Grużewska, Recherche sur les propriétés de la solution du système parabolique d'équations 385
11. H. Milicer-Grużewska, Un théorème sur la dérivée spatiale de l'intégrale généralisée de Poisson-Weierstrass du système parabolique d'équations 391

Physique Théorique

12. H. Stachowiak, Equations of Potential and Temperature for Conductors in an External Magnetic Field 399

Physique Expérimentale

13. R. Drabent, Fluorescence Yield of Eosin Solutions in Collodion and in Glucose 403
14. S. Chojnacki, A. Jasiński, W. Kusch, J. Kownacki H. Lancman and J. A. Yutlandov, γ-Spectra of ^{165}Tu and ^{167}Tu 407

Cena zł 20.—